

Neues zum relativistischen elastischen Zweiteilchenstoß

Manfred Kunz* Stefan Spaarmann⁺ Bianca Grebe*

* Reinhardtstr. 11, 04318 Leipzig, Rehfeldstr. 7, 12527 Berlin, ⁺Pixisstr. 7, 81679 München

Kurzfassung

Der Computer-Umgang der jungen Generation bietet die Chance, andere als die herkömmlichen Wege zur Relativitätstheorie zu beschreiten. Grundlage ist der Comptoneffekt, der unter Annahme eines Gammaquants der Wellenlänge λ ein Teilchen mit der Ruhmasse m_0 in Bewegung setzt oder zur Ruhe bringt, dergestalt, dass beim austretenden Quant eine Wellenlängenverschiebung um den Betrag Δ eintritt. Ein Computerbaustein, der die Verschiebungsformel $\Delta = \lambda_A \cdot (1 - \cos\vartheta)$ mit der Compton-Wellenlänge λ_A beinhaltet, lässt sich auf den Zweiteilchenstoß anwenden. Man zerlege einen Zweierstoß in vier Teilprozesse, nämlich Stoßpartner jeweils zur Ruhe bringen bzw. in Bewegung versetzen, dann kann der Stoß mit vier Computerbausteinen nachvollzogen werden. Die Kunst besteht darin, passende Gammaquanten zu finden, die einen Ringschluss der vier kombinierten Comptoneffekte herbeiführen, wobei alle vorgeschossenen virtuellen Gammaquanten infolge des Ringschluss exakt wieder abgeliefert werden. Hier interessiert die Geometrie der Quanten, während die Stoßimpulse sich von selbst einstellen. Beschränkt man sich auf den Ruhestoß im Laborsystem, dann reduziert sich die Methode auf nur drei Comptonbausteine. Der Beitrag rückt dieses „schulgerechte“ Impulsdreieck in den Mittelpunkt. Alles lässt sich geometrisch ableiten, wobei die Relativitätstheorie kaum benutzt zu werden braucht, weil sie quasi eine Eigenart des Impulsdreiecks ist. Alle Seiten des Dreiecks erhalten Impulscharakter, ihre Differenzen sind kinetische Energien, die Teilchenimpulse werden den drei Seitenhalbierenden zugeordnet. Nur ganze Zahlen und sich selbst einstellenden Einheiten werden gebraucht.

1. Einleitung

Seit einem dreiviertel Jahrhundert weiß man, dass die Materie sozusagen aus Licht besteht, wenn man unter Licht hauptsächlich die unsichtbaren kurzen Wellenlängen, hier Gammaquanten genannt, versteht. Compton hatte eine Wellenlänge λ_e des ruhenden Elektrons entdeckt und De Broglie hatte eine Wellenlänge des bewegten Elektrons vorausgesagt. Diese Gammaquanten des ruhenden und des bewegten Elementarteilchens lassen sich am elastischen Stoß zweier Teilchen beobachten, vorausgesetzt die Geschwindigkeit v liegt ungefähr in der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit c . Zwischen dem klassischen und dem stark relativistischen Stoß liegt ein privilegierter Fall, der als „schulgerechter“ Stoß bezeichnet wird. Der Sonderfall, der in dieser Arbeit nur beim Zweiteilchenstoß mit einem anfangs ruhenden Teilchen eingehend betrachtet wird, zeichnet sich hinsichtlich der relativen Geschwindigkeit $\beta = v/c$ dadurch aus, dass die Summe der drei β -Werte ungefähr gleich 1 ist. Näheres dazu im Kapitel 6.

Wir betrachten zunächst einmal zwei Teilchen mit gleichen Ruhmassen und gleichen β -Werten beim Zusammenstoß. Man nehme die Impulse der Stoßvektoren der Teilchen und füge sie unter dem Winkel ϑ ihres Aufeinandertreffens zusammen. Das Bild nach dem Stoß gleicht einem Spiegelbild, denn

unter der Annahme eines elastischen Verlaufes geschieht selbst bei hohen relativistischen Energien nichts Anderes, als wir es vom mechanischen Kugelstoß her kennen, siehe Abb. 1.

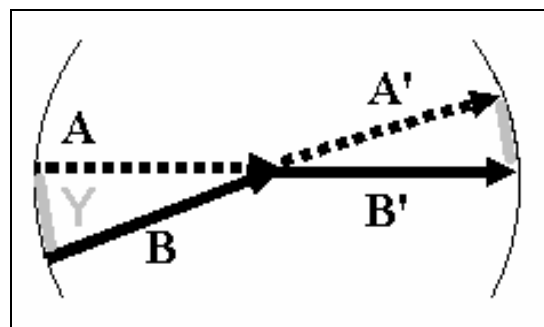


Abb. 1: Die betragsmäßig gleichen Eingangsimpulse der Teilchen A und B treten scheinbar unverändert wieder aus. Tatsächlich kommt es zu einer Richtungsänderung. Das Teilchen A mit seinem punktierten Impuls wechselt seine Bahn und verlässt als A' die Stoßszene. Außer einem Partnerwechsel findet nichts weiter statt, die Partner tauschen ihre Bewegungsparameter aus. Die vereinigten Impulse $A+B'$ und $B+A'$ sind gleich groß. Das grau gezeichnete Y kennzeichnet die kleine Seite des Impulsrechtecks.

Diese vereinigten Stoßimpulse kann man als Diagonalen eines Rechtecks auffassen, und im Folgenden soll unsere Aufmerksamkeit weniger den Diagonalen, sondern mehr dem umhüllenden Rechteck gelten. Es sollen nachfolgend nur noch Impulse verwendet werden, d.h. die Rechteckseiten X und Y sollen ebenfalls Impulscharakter besitzen und zunächst Gammaquanten sein. Auch wenn diese harten elektromagnetischen Strahlen mit Farben wenig gemeinsam haben, soll dennoch der größere Impuls X als p_{blau} und der kleinere entsprechend als p_{rot} bezeichnet werden. Das Impulsrechteck, das in Abb. 1 eingezeichnet werden kann, erweckt den Eindruck eines rechtwinkligen Aufeinandertreffens von zwei Quanten. Das ist natürlich falsch, denn fasst man das rote Quant als Nachfolger auf, dann können die Vorgänger „blau“ und Nachfolger „rot“ nicht aufeinander stoßen. Man spricht von einer Verschiebung der Wellenlänge während des Stoßes.

2. Der Comptoneffekt als Computerbaustein

Wir nehmen nun Bezug auf ein Physikphänomen, benannt nach Compton, wo ein Gammaquant ein Teilchen mit der Ruhmasse m_0 in Bewegung setzt (oder zur Ruhe bringt). Das Gammaquant mit einem Impuls p_{blau} wird nicht völlig verschluckt, sondern es entsteht ein verändertes Gammaquant, das mit dem Impuls p_{rot} unter dem Streuwinkel ϑ abgestrahlt wird. Beide Quanten weisen eine Differenz bezüglich Energie, Impuls, Frequenz und Wellenlänge auf. Setzt man gemäß Abb. 2 die Differenz der reziproken Energien von „rot“ und „blau“ gleich Δ , dann lautet mit $\lambda_0 = \text{proportional } 1/E_0$ die „Verschiebungsformel“ $\Delta = \lambda_0 \cdot (1 - \cos \vartheta)$. Die Comptonwellenlänge des Teilchens besitzt den Index 0, und es sei angemerkt, dass diese Wellenlänge nicht nur ein an die Ruhmasse angehängtes „Fähnchen“ ist, sondern dass es sich um eine kurzzeitige völlige Verwandlung der Ruhmasse in ein Gammaquant handelt. Übrigens hat Mellen [1] den Comptoneffekt als optischen Dopplereffekt gedeutet, wo die Wellenlänge des einen Photons als Rotverschiebung des anderen Photons erscheint. Das Kuriose ist, dass das „rote“ Photon für den ruhenden Beobachter so erscheint, als ob der einfallende „blaue“ Strahl vom bewegten Elektron emittiert würde. Beim inversen, rückwärts verlaufenden Comptoneffekt funktioniert dasselbe als Blauverschiebung.

Von den Energie E des Gammaquants gelangt man mit $c = 1$ unverzüglich zum Impuls $p = E/c$. Die Ruhmasse in Form ihres Energieäquivalents E_0 lässt sich ebenso in einen Impuls umrechnen, wenn auch die gängige Meinung dies nicht zulässt, weil die Ruhmasse an sich bewegungslos ist. In der Tat berechnet sich bei einem freien bewegten Teilchen der Impuls nach Einstein anders, nämlich aus der Gesamtenergie und der Ruhmasse, siehe Gleichung (14). Wie später gezeigt wird, lässt sich jedoch für ein gebundenes System, wie bei unserem Rechteck, im Prinzip wie bei den Photonen verfahren:

$$p_0 = E_0 / c.$$

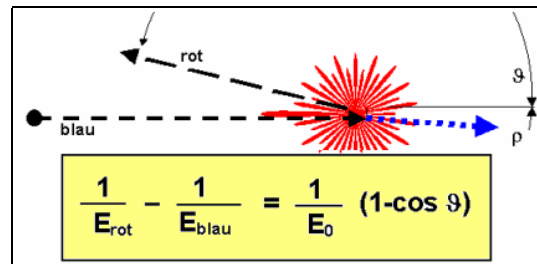


Abb. 2: Der Comptoneffekt und die beschreibende zentrale Formel des Zusammenspiels von Energien der Photonen vor und nach dem Stoß mit einem ruhenden Teilchen. Der Winkel ϑ markiert die Ablenkung des Photons, während φ die Teilchenrichtung bezeichnet. Bezugslinie ist der verlängerte Einfallstrahl von E_{blau} .

Ein Computerbaustein, der sich allein auf diese Formel stützt, kann den Stoß zweier Teilchen simulieren [2]. Zerlegt man nämlich einen Zweierstoß in folgende vier Teilprozesse: Partner A zur Ruhe bringen, Partner B zur Ruhe bringen, Partner A in Bewegung versetzen und Partner B in Bewegung versetzen, dann kann der Stoß mit vier Computerbausteinen nachvollzogen werden. Die Kunst besteht darin, passende (virtuelle) Gammaquanten zu finden, die einen Ringschluss der vier kombinierten Comptoneffekte so herbeiführen, dass alle eingesetzten, geborgten bzw. vorgeschossenen virtuellen Gammaquanten exakt wieder abgeliefert werden können. Dieses Computerspiel befasst sich nur mit der Geometrie der virtuellen Quanten (Rechteckseiten) und mit den Ruhmassen, während sich die Stoßimpulse (Diagonalen) automatisch einstellen. Um im Fall eines allgemeinen Vierecks diese vier Comptonbausteine in Einklang zu bringen, muss man einen Computer einschalten. Der spielerische Umgang mit dem PC, wie er besonders bei der jungen Generation ausgeprägt ist, macht die Lösungssuche zum Vergnügen und bietet somit eine Chance, andere Wege zur Behandlung relativistischer Stöße zu beschreiten. Allein die Impulsvierecke inklusive der konvexen Formen bieten ein geradezu riesiges Aufgabengebiet für viele Mitstreiter. Der Versuch einer automatisierten Berechnung scheiterte bisher am individuellen Charakter jedes Viereckgebildes. Da die Relativistik hier eine Rolle spielt, ist der Übergang von der Impulswelt zur reziproken Impulswelt (und das ist die Welt der Wellenlängen) nicht ganz einfach. Während es beim Einzelprozess nach Abb. 2 keine Rolle spielt, ob Wellenlänge oder Energie bzw. Frequenz gewählt wird, ist dies beim Verbund von Comptonbausteinen ein ziemlich großes Problem, indem die Geometrie von Euklid versagt. Die relativistische Längenkontraktion ist die Ursache dafür.

3. Zwei gleiche Massen – no problemo

Zu Beginn werden Stöße mit Ruhmasse 1 konstruiert. In Abb. 3 wird tabellarisch die Geschwindigkeit stark variiert, und anstelle von Gammaquanten ist nunmehr von Photonen die Rede. Rechtwinklige Photonenimpulse X, Y und Einheiten mit $c=1$ vorausgesetzt, wird die Forderung $m_0=1$ gemäß Compton mit der Verknüpfung der Photonenimpulse in folgender Weise $1/Y-1/X = 1$ erfüllt. Man denke bei X und Y immer an die Seiten des Impulsrechtecks mit der Maßgabe $X>Y$. Die Vorgehensweise ist so, dass der größere Photonenimpuls $X=p_{\text{blau}}$ vorgegeben und $Y=p_{\text{rot}}$ berechnet wird, denn es gibt nur einen Freiheitsgrad in dieser Aufgabenstellung. Mit einer einzigen Zahlenvorgabe wird über $Y=1/(1/O+1)$ bereits der zweite Werte Y determiniert, der die gewünschte Ruhmasse 1 garantiert. Natürlich entstehen im gleichen Maße die Diagonalen d und die damit verbundenen Winkel. Die Überschrift sagt es voraus: es gibt keine Probleme. Doch wie stets häufen sich Fragen über Fragen, die im Einzelnen anhand einiger Beispiele gestellt werden.

Begonnen wird mit einem Rechteck aus dem Mittelfeld der Tabelle, und zwar mit einer $X=1$. Es handelt sich um einen Photonenimpuls, der an der Ecke mit einer Ruhmasse 1 in Wechselwirkung tritt. Das Impulsviereck hat sozusagen einen Rahmen, der aus Lichtimpulsen besteht, und ein Innenleben, bestehend aus den Diagonalen, Winkeln, Geschwindigkeiten und anderen „relativistischen“ Effekten. Die Spalte 5 beinhaltet die Diagonale der Impulse, das sind die Spuren der eigentlich interessierenden Stoßpartner. Der Betrag jedes Teilchenimpulses ist hier $\sqrt{5/4}$ und der Stoßwinkel berechnet sich gemäß Spalte 6 zu zweimal $26,56^\circ$. Dies alles sind banale Werte eines trivialen Rechtecks. Der auf c bezogene Geschwindigkeitswert in Spalte 7 ist $0,745355$.

Wie kommt man mit den einfachen Berechnungsvorschriften von Abb. 3 überhaupt zu solchen physikalischen Aussagen? Hier noch einmal das Beispiel $X=1$. Ein Physiker würde bei der Berechnung des Comptoneffekts an jeder Rechteckseite Ergebnisse finden, die mit unseren rein mathematischen Überlegungen voll übereinstimmen. Nimmt man z.B. GeV als Maßeinheit für die Energie, so erhält man als Masse $m_0 = 1$ GeV, als Lichtimpuls $X = 1$ GeV/c, als kinetische Energie (Spalte 4) des Teilchens $E_{\text{kin}}=0,5$ GeV und als Teilchenimpuls $\sqrt{5/4}$ GeV/c. Der Winkel φ von Spalte 6 und die Geschwindigkeit v/c von Spalte 7 entsprechen voll und ganz den Erwartungen. Dies ist einerseits interessant und andererseits auch ernüchternd, weil man es nur mit einem Rechteck zu tun hat. Der eigentliche Zweierstoß vollzieht sich eigentlich nur auf den Diagonalen, und durch Einschaltung des Comptoneffekts wird der Vorgang lediglich nur

stark aufgebläht. Dennoch hat dieses Vorgehen eine Existenzberechtigung, weil der farblose und geradezu langweilige Schlagsabtausch Farbe erhält und in spannende Einzelprozesse aufgelöst wird. Es ist keineswegs selbstverständlich, dass der Teilchenimpuls mit der Diagonale und der Winkel φ mit dem Winkel von Spalte 6 übereinstimmt, in vielen anderen Fällen ist das nicht der Fall. Kommen wir zur Spalte 7, wo gemäß der umgeformten Impulsformel $v=p/m$ der Wert v/c unter zu Hilfenahme von $c=1$ gewonnen wird. Da die Masse aus Ruhmasse und relativistischer Zusatzmasse (Spalte 4) zusammengesetzt ist und da der Impuls $\sqrt{5/4}$ GeV/c aus Spalte 5 bekannt ist, entnimmt man für das Beispiel von Zeile 4 den Wert $\sqrt{5/9} \approx 0,745$. Lässt man den Comptoneffekt weg, dann merkt man, dass die Relativitätstheorie hier eine dem Rechteck innewohnende Eigenschaft ist.

	Spalte 1	Spalte 2	Spalte 3	Spalte 4
Zeile	X	Y	X+Y	X - Y
1	1836	0,999456	1836,99945	1835,0005
2	100	0,990099	100,990099	99,009901
3	2	0,666667	2,666667	1,333333
4	1	0,5	1,5	0,5
5	0,618034	0,381966	1	0,236068
6	0,5	0,333333	0,833333	0,166667
7	0,01	0,009901	0,019901	0,000099
8	0,005173	0,005147	0,01032	0,000027

	Spalte 5	Spalte 6	Spalte 7
Zeile	$\sqrt{Y^2 + X^2}$	$\text{Atn}(Y/X)^\circ$	v/c
1	1836,00027	0,03119	0,9999999
2	100,004901	0,567266	0,9999500
3	2,108185	18,434949	0,9035079
4	1,118034	26,565051	0,7453560
5	0,726543	31,717474	0,5877853
6	0,600925	33,690068	0,5150788
7	0,014072	44,714949	0,0140709
8	0,007297	44,852176	0,0072973

Abb. 3: Tabellierung ausgewählter Stoßbeispiele, die alle die Ruhmasse 1 besitzen. Der reziproke Impuls von Y ist um eine Einheit größer als der reziproke Impuls von X. Die elastischen relativistischen Zweierstöße wurden reduziert auf ein Rechteck mit den Seiten X und Y. In Spalte 5 ist der Impuls p dargestellt. Die Ruhmasse beträgt 1 und der Massenzuwachs ist aus Spalte 4 ersichtlich. Letzteres erklärt sich damit, dass die Energiedifferenz zweier Gammaquanten als kinetische Energie des Teilchens wieder auftaucht. Die relativistische Masse beträgt demzufolge $m=1+\text{Spalte 4}$. Mittels p und m gelangt man gemäß der umgeformten Impulsformel zur Geschwindigkeit $v=p/m$. Der Wert v/c in der letzten Spalte folgt aus Spalte 5, geteilt durch m.

4. Teilchenstoß im Goldenen Schnitt

Es geht um ein Rechteck im harmonischen bzw. Goldenen Schnitt, der bekanntlich etwas mit Schönheit zu tun hat. Bilder und Skatkarten sind oft in diesem Format gehalten. Das Verhältnis $X/Y = (\sqrt{5} + 1)/2 \approx 1,618$ hat eine Sonderstellung. Das auf der rechten Seite von Abb. 4 gezeichnete Rechteck, welches nicht in Tabelle 3 enthalten ist, verkörpert eine rechtwinklige Streuung mit dem besonderen Seitenverhältnis $a=0,618$ und $b=1,618$. Ausnahmsweise können hier die Impulse durch die reziproken Werte, den Wellenlängen ersetzt werden, weil beide Kehrwerte vertauscht die gleichen Werte liefern. Diese Einmaligkeit ist Anlass für den Hinweis, dass bei einem normalen Impulsdreieck mit der Winkelsumme 180° das entsprechende reziproke Wellenlängendreieck diese Winkelsumme nicht einhalten kann, weil die Euklidische Geometrie hier am Ende ist. Die genaue Schilderung der Vorgänge in der vom Rechteck aufgespannten Zelle ist mit Vorsicht zu genießen. Auffällig ist die resultierende Geschwindigkeit $\beta = v/c = \sqrt{3/4}$, welche eine Verdopplung der Ruhmasse zur Folge hat. Die Diagonale besitzt eine Länge von $\sqrt{3}$, und der Teilchenimpuls $m \cdot v$ erhält denselben Wert. Die Geometrie entspricht also den Erwartungen, welche die Physiker aus dem Comptonrechteck berechnen würden.

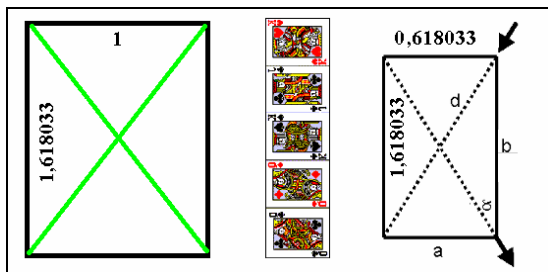


Abb. 4: Das linke Rechteck ist in Zeile 5 von Abb. 3 beschrieben. Die Geometrie entspricht ebenfalls den Erwartungen, es liegt dasselbe Verhältnis X/Y vor, auch der Stoßwinkel ist unverändert, aber die Werte für Masse, Impuls sind entsprechend der Werte X, Y um den Faktor 2.618 verkleinert bzw. vergrößert. Die Diagonalen schneiden sich in einem Winkel, dessen Tangens 2 beträgt.

5. Zwei gleiche Ruhmassen - Grenzfälle

Die Beispiele in Abb. 3 reichen von großen bis zu kleinen X -Werten. Der kleinste Wert in Zeile 8 ist als Kehrwert von $\sqrt{2} \cdot 137$ entstanden, damit wird Bezug genommen auf die Feinstrukturkonstante von Sommerfeld [3]. Hier treffen sich also zwei Stoßimpulse mit einer Geschwindigkeit $v/c \approx 1/137$, deren kinetische Energie aus Spalte 4 zu entnehmen ist. Als Einheit für die Ruhmasse könnte man $\frac{1}{2} \text{ MeV}/c^2$ annehmen, womit man dem Elektron ziemlich nahe kommt. Dieses Beispiel würde also

der physikalischen Realität entsprechen, wenn man von der elektrischen Ladung und deren Einfluss auf die Elastizität absieht. Da sich das Rechteck fast in ein Quadrat verwandelt hat, liegt der Stoßwinkel bei etwa 45° . Nur unter diesen ausgesuchten Bedingungen lässt sich der Stoß sozusagen ohne weitere Spezifizierung der Einzelheiten ultrascharf berechnen. Man erkennt, dass der relativistische Einfluss ziemlich gering ist und dass man sich mechanischen Verhältnissen nähert, siehe auch Abb. 5. Anders beim entgegengesetzten Fall in Zeile 1. Das Rechteck wird immer schlanker und nähert sich im Grenzfall einer Geraden. Die Stoßpartner treffen sich auf einer Geraden. Die Forderung $m_0=1$ ist wie immer erfüllt; bleibt man bei der für das Elektron gewählten Maßeinheit, dann hat sich die Ruhmasse jedes Partners 1835 mal erhöht und eine Größe erlangt, die etwa der Ruhmasse des Neutrons entspricht. Der Wert v unterscheidet sich erst in der achten Stelle von der Lichtgeschwindigkeit c . Man könnte meinen, dass ein einziges Diagonalenpaar im Strahlenrechteck alle möglichen Stöße repräsentiert, sofern das Produkt aus Masse mal Geschwindigkeit denselben Impulswert ergibt. Dem ist nicht so, weil ein konkretes Rechteck nicht nur den (für beide Partner gleichen) Teilchenimpuls festlegt, sondern über die Comptonformel auch die Ruhmasse mit festlegt. Einen Fall, der etwa der Zeile 8 von Abb. 3 zuzuordnen wäre, zeigt Abb. 5. Im Grenzfall genügt quasi ein einziger Comptonbaustein, wenn man vom Vorzeichen absieht.

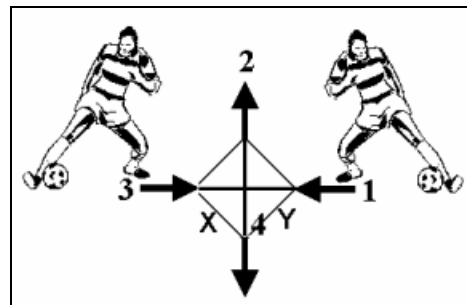


Abb. 5: Ein fast quadratisches Rechteck mit fast rechtwinkligen Diagonalen verkörpert den Stoß zweier gleicher Teilchen mit fast gleichem Impuls, markiert durch die Ziffern 1 bzw. 3. Die austretenden Impulse sind mit 2 und 4 markiert. Am Eckpunkt Ziffer 4 tritt das etwas energiereichere Photon X ein und das energieärmere Photon Y aus. Für die Impulse der Gammaquanten gilt $X > Y$. Der (wenn auch sehr geringe) Energieunterschied verursacht die Bewegung des Teilchens am Punkt 4, welches hier gewissermaßen ruhte. Eine Reihenfolge z.B. Schritt 1 vor Schritt 3 existiert nicht, aber ein Drehsinn (hier entgegen des Uhrzeigers) existiert. Bei allen Kombinationen von Comptonbausteinen ist neben dem regulären Comptoneffekt auch der inverse, zeitlich umgekehrte Comptoneffekt beteiligt.

6. Das Impulsdreieck - ein Überblick

Es gibt einige Neuigkeiten, die nicht einmal den Forschern an den Beschleunigern bekannt sein dürften, aber bereits von Schüler berechnet werden können. Man könnte wetten, dass ein „aufgeklärter“ Schüler gegen einen nicht aufgeklärten Professor gewinnt. Man betrachte den Stoß von zwei (Billard-) Kugeln mit den Massen A und B. In Abb. 6 wird der Vorgang mit Stroboskop [4] oder als Film in Zeitlupe gezeigt. Die Gesamtszene vor und nach dem elastischen Stoß lässt sich durch ein Dreieck der Impulse zusammenfassen. Für Teilchen mit hohen Geschwindigkeiten erhebt sich die Frage, ob dieses Bild erhalten bleibt. Hier kommt uns der Impulsbegriff zu Hilfe, der seit Newton souverän erhalten geblieben ist, auch wenn Masse und Geschwindigkeit durch die Relativitätstheorie modifiziert worden sind. Zwischen dem klassischen und dem stark relativistischen Stoß existiert nun ein Fall, der als **schulgerechter Stoß** bezeichnet werden soll. Es ist ein Stoßtyp mit Eigenschaften, die für die Schule interessant sind. Man kann mit **ganzen Zahlen** und ohne Maßeinheiten rechnen, es gibt **dimensionslose Einheiten**, die sich von selbst einstellen.

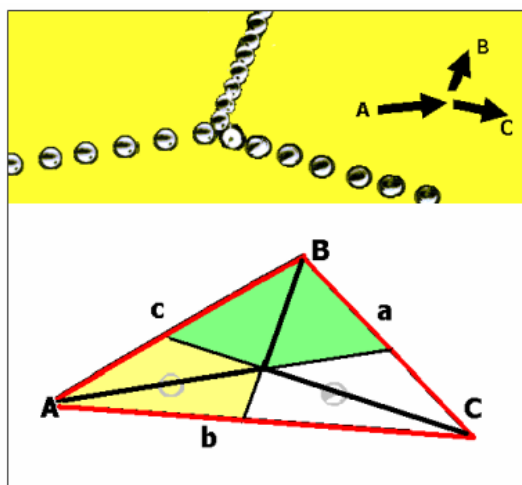


Abb. 6: Das schulgerechte Stoßdreieck mit den Seiten a, b, c besteht aus 3 virtuellen Lichtquanten (so etwas wie 3 Quarks), deren Summe $a+b+c$ Ruhmasse genannt wird. Aus dem Dreieck kann man alles ablesen:

- die Seitenhalbierenden sind die 3 Impulse,
- die Seitendifferenzen sind die 3 kinetischen Energien,
- die 3 Seiten sind die 3 Photonenenergien bzw. die energieäquivalenten Massen, wenn man $c=1$ setzt.

Weitere Merkmale sind: Berechnung aller Stoßparameter aus dem Dreieck ohne Inanspruchnahme der Relativitätstheorie, da diese merkwürdigerweise im Dreieck implizit vorliegt, Übereinstimmung des Teilchenstoßes mit drei kombinierten Comptoneffekten, Übereinstimmung mit bekannten End-Formeln der Stoßtheorie.

Alles sind zwar Impulsvektoren, doch für das Dreieck ist der Begriff **Vektor entbehrlich**. Wegen $c=1$ hat jedes Photon einen gleichen Zahlenwert für die fiktive Masse m , für die Energie $m \cdot c^2$ und für den Impuls $m \cdot c$. Jede Kombination der Stoßpartner A, B weist nur eine einzige mögliche Stoß-Konstellation mit festen Geschwindigkeiten und Winkeln auf. Durch eine geringfügige Verkleinerung der Ruhmasse B gelingt es, zum entsprechenden klassischen Fall, dem **schulgerechten klassischen Stoßdreieck** überzuwechseln, und zwar unter Beibehaltung des Impulsdreiecks. Dann gilt folglich auch nicht mehr die Relation zwischen der Ruhmasse A als Summe der Seiten. Schließlich funktioniert auch die Nachbildung mit den Comptonbausteinen nicht mehr. Das typische Kriterium für den klassischen Stoß, nämlich $p^2/(2m)=e$ funktioniert nicht in der Relativistik, selbst wenn für m die exakte relativistische Masse eingesetzt wird.

Zu den Themen Laborsystem, Ruhestoß und Schwerpunktstoß folgen einige Zwischen-Bemerkungen, da sich beim Überlesen der folgenden Seiten Unruhe zum Ruhestoß ausbreiten wird. Die Besorgnis richtet sich auf das Fehlen jeder Beschleunigung, weil der ruhende Körper sozusagen im Hauruckverfahren in Bewegung gesetzt wird. Beschleunigen heißt hier nicht, in zehn Sekunden aus dem Stand auf 100 kmh, sondern zeitlos schnell aus dem absoluten Stillstand auf exakt 60% Lichtgeschwindigkeit zu kommen. Der Wert $\beta=v/c=0,6$ ist nämlich der Grenzwert, der im geometrische Konzept der Impulse als Seitenhalbierende maximal auftreten kann, wie hier vorweg gesagt sei.

Man wird einräumen, dass die unvorstellbar kleinen Elementarteilchen, auf die hier vorrangig Bezug genommen wird, auch eine Beschleunigung absolvieren. Das In-Bewegung-Setzen und das Zur-Ruhe-Kommen muss sogar als eine infinitesimale Periode verstanden werden, wenigstens solange man sich im Rahmen der Unschärferelation von Heisenberg bewegt. Doch das Konzept ignoriert jede Beschleunigungsphase, stattdessen wird im Impulsraum eine Stoß-Zelle aufgespannt, die für eine gewisse Zeit vor und nach dem Stoß eine Zeitlosigkeit repräsentiert. Dennoch, vom Ansatz her bleibt die Ruhebedingung $v_B=0$ verbindlich, ebenso wie die Relativistik dies für ihr Laborsystem voraussetzt. Im Gegensatz dazu steht das Schwerpunktsystem [5].

Eines der Hauptziele ist die Umrechnung der beiden Bezugssysteme. Für den Bau von Beschleunigern hat dies große finanzielle Auswirkungen. Die Vorstellung des Massenschwerpunkts, die den Physiker und die Physik prägt, wird in den folgenden Ausführungen kaum gebraucht und nicht erwähnt. In der Impulswelt, konkret im geometrischen Konzept der Impulse als Seitenhalbierende, ist die relativistische Energieerhaltung implizit enthalten. Außerdem wird

die Ruhmasse aufgelöst in (ruhmassenlose!) Impulse, wie wir sie vom Photon her kennen. Deswegen schwindet die Bedeutung des Schwerpunkts der Masse zugunsten des Schwerpunkts der Impulse. Übrigens dürfte es dem unbefangenen Leser leichter fallen, sich von dem Begriff der Ruhmasse zu trennen und ihn zu ersetzen durch einen kurzzeitig entstehenden dreieckigen Strahlungsgürtel aus drei Photonen. So wird aus Materie Licht.

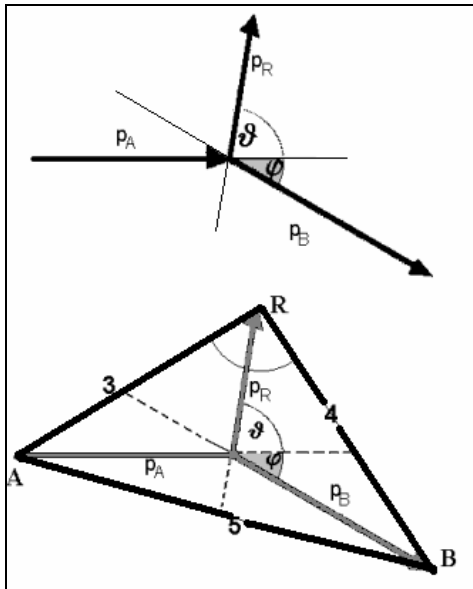


Abb. 7: Darstellung der drei Impulse, die einen Stoß beschreiben. Es wird eine Methode verfolgt, die als „Konzept der Impulse als Seitenhalbierende“ bezeichnet werden soll. Hierbei wird das Impulsdreieck derart verändert, dass die einzelnen Impulse sich in einem besonderen Punkt (dem mathematischen Schwerpunkt eines Dreiecks) schneiden. Es entsteht ein umhüllendes Dreieck, in dem die Impulse die Rolle von Seitenhalbierenden spielen. Die drei Ecken des Dreiecks sind A, B, R. Die Seitenhalbierenden werden durch den gemeinsamen Schnittpunkt im Verhältnis 1:2 geteilt, wobei der längere Abschnitt jeweils zur Ecke gerichtet ist. Die kürzere Abschnitt ist gestrichelt gezeichnet und halbiert die jeweilige Seite. Die Seitenhalbierenden verkörpern dann die drei Impulse, wenn die Länge verdoppelt wird, also für Punkt A $2 \cdot s_A = p_A$. In dem gezeigten „Paradebeispiel“ sind die Seitenlängen 3, 4, 5. Als Impulse dafür berechnen sich $p_A = \sqrt{52}$, $p_R = \sqrt{25}$ und $p_B = \sqrt{73}$. Die Winkel werden durch ϑ und φ beschrieben, die vorliegenden Werte lauten $\tan \vartheta = 18$, $\tan \varphi = 18/25$.

7. Das geometrische Konzept der Impulse als Seitenhalbierende

Kann man beliebige Massen mit beliebigen Geschwindigkeiten im Zweierstoß elastisch aufeinander schießen? Die Antwort lautet Ja und Nein. Anders als bei Stoßaufgaben der Schulphysik setzen wir m_A , m_B , v_A als nicht gegeben voraus und betrachten demzufolge die Geschwindigkeiten u_R ,

u_B nach dem Stoß sowie die beiden Winkel nicht vordergründig als Unbekannte. Die Vorgabe von drei Impulsen ist ungewöhnlich, weil es den Anschein erweckt, als sei die Aufgabe schon gelöst. In der Tat handelt es mehr um den Entwurf von Stoßszenarien als um die Lösung landläufig gestellter Aufgaben. Die obigen Rechnungen mit dem Konzept der Impulse als Seitenhalbierende lassen die Winkel aus dem Spiel und halten die Massenwerte zunächst offen. Ein weiterer Aspekt dieser Beschränkung auf die Impulse liegt darin, dass diese Stoßdynamik auch die relativistischen Stöße mit umfasst. Dem Impuls kann man nicht ansehen, ob er klassisch oder relativistisch ist, er ist SRT-invariant, erst die Zerlegung in Masse und Geschwindigkeit oder die Einbeziehung von Ruhmasse und Gesamtenergie lassen dies erkennen. Ob man zur Rechnung die drei Dreieckseiten oder die drei Impulse benutzt, ist gleichgültig, eine Einschränkung für die Vorgabewerte gibt es zunächst nicht. Um zu den noch unbekannt Massen zu gelangen, braucht man die kinetischen Energien, die hier gemäß der fundamentalen Formel nach Einstein als $Z_A \cdot c^2$ bzw. $Z_R \cdot c^2$, $Z_B \cdot c^2$ geschrieben werden. Diese Z-Werte sind relativistische Massenzunahmen, doch sie werden hier einfach als Differenzen der Dreieckseiten gewonnen, wie im einzelnen später noch zu klären ist.

Aus jedem Impuls und dem entsprechenden z-Wert lassen sich Masse und Geschwindigkeit ermitteln, wozu der relativistische Ansatz (14) und (15) dient. Man erhält für jeden Impuls eine Ruhmasse, also insgesamt drei Ruhmassen, was einerseits eine böse Überraschung und andererseits ein Glücksfall ist. Das umgekehrte Vorgehen, also die Gewinnung der Impulse aus den Dreieckseiten bringt dieselben Ergebnisse. Auch hier entstehen mit dem relativistischen Ansatz die Geschwindigkeiten und die drei Massen m_{A0} , m_{R0} und m_{B0} .

Allerdings kommt es mitunter vor, dass zwei Massen (insbesondere $m_{A0} = m_{R0}$) echt übereinstimmen, und nur dieser Fall hat etwas mit den Erwartungen der Stoßmechanik zu tun, weil sich beim elastischen Stoß die Ruhmassen nicht ändern. Bei den schulgerechten Stoßdreiecken trifft dies stets zu, wie noch zu beweisen ist.

Die Berechnung des abgeschlossenen Systems basiert auf den Erhaltungssätzen für Impuls und Energie. Eine abstrakte Ableitung nach dem Impulssatz wird hier vermieden, indem man sich auf die Trigonometrie des Impulsdreiecks konzentriert. Die Forderung nach der Impulserhaltung, bezogen auf die Vektoren p_A und $p_R + p_B$, wird durch einen Ringschluss der Impulse erfüllt, indem diese zu einem Dreieck zusammengefügt wurden, siehe Abb. 8 unten, wozu das Paradebeispiel benutzt wurde. Die Geometrie, genauer der Kosinussatz nach Formel (1) beschreibt den Zusammenhang. Des Weiteren muss

die Energie erhalten bleiben. Die Gleichung (2) der klassischen Energieerhaltung wird gleich dazu benutzt, um p_B in (1) zu eliminieren. Man erhält ein Relation der Vorgabewerte p_A , ϑ sowie der gegebenen Massen und der Unbekannten p_R , die sich als quadratische Gleichung $0=p_R^2 + k_a \cdot p_R + k_b$ mittels des Wurzelsatzes nach Vieta lösen lässt. So gelangt man mit den Koeffizienten k_a , k_b zur Lösung (3), die als positive Wurzel ein sinnvolles Ergebnis liefert. Dann kann man p_B aus (1) berechnen und schließlich wird der sich einstellende Winkel φ mit (5) ermittelt.

$$(1) \text{ Kosinussatz } p_B^2 = p_R^2 + p_A^2 - 2 \cdot p_A \cdot p_R \cdot \cos \vartheta$$

$$(2) \frac{1}{2} p_A / m_A = \frac{1}{2} p_R^2 / m_R + \frac{1}{2} p_B^2 / m_B$$

$$k_a = -2 \cdot p_A \cdot \cos(\vartheta) / (m_B / m_A + 1)$$

$$k_b = -p_A^2 \cdot (m_B / m_A - 1) / (m_B / m_A + 1)$$

$$(3) p_R = -k_a / 2 + 1 / 2 \cdot \sqrt{(k_a^2 - 4 \cdot k_b)}$$

$$(4) p_R^2 = p_A^2 + p_B^2 - 2 \cdot p_A \cdot p_B \cdot \cos \varphi$$

$$(5) \cos \varphi = (p_A^2 + p_B^2 - p_R^2) / (2 \cdot p_A \cdot p_B)$$

Mit den Impulswerten des Paradebeispiels, dessen Dreiecksseiten 3, 4, 5 übrigens zufällig einen rechten Winkel einschließen, erhält man über $\cos \varphi = 100 / \sqrt{(4 \cdot 52 \cdot 73)}$ schließlich etwa $35,75^\circ$. Die Beziehung (5) wird in der Literatur meist anders gewonnen, wie Abb. 9 zeigt. Es geht um einen Kreis mit einem Radius $v_A \cdot m_{\text{red}}$, wobei die reduzierte Masse m_{red} aus $m_A \cdot m_B / (m_A + m_B)$ gebildet wird. Die Spitze des Vektors p_B liegt auf der Kreislinie und trifft dort auf das Ende des Vektors p_R . Der Eingangsvektor p_A liegt direkt auf der Abszisse.

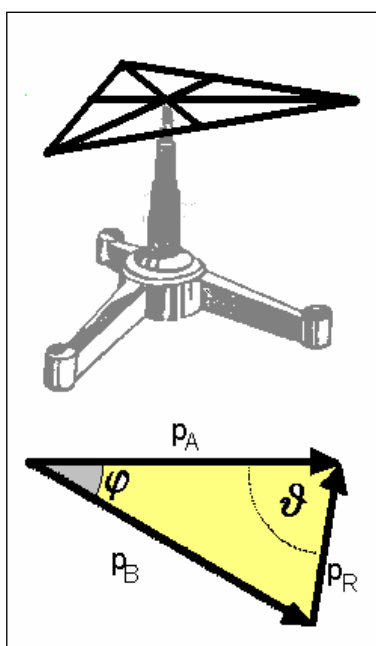


Abb. 8: Das untere Bild zeigt einen Ringschluss der Teilchenimpulse, das obere Bild zeigt unabhängig davon eine Stabkonstruktion eines Dreiecks mit Seitenhalbierenden, gelagert im Schwerpunkt. Man

gelangt auch experimentell durch Probieren zur Lösung, wenn man sich die Eigenschaft eines im Schwerpunkt gelagerten Dreiecks zunutze macht. Bei den Seitenhalbierenden, die sich im Schwerpunkt schneiden, genügt es, statt der Fläche drei Stäbe zu benutzen. Sie müssen im Verhältnis 1:2 geteilt im Schnittpunkt aufgehängt werden.

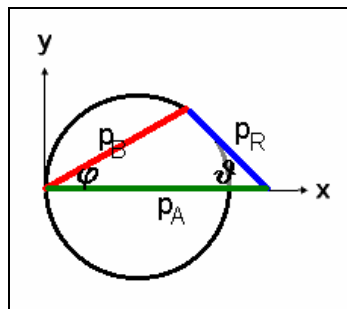


Abb. 9: Die in der Schulphysik übliche Darstellung des schiefen bzw. des nicht zentralen Stoßes. Die Lösung ist graphisch darstellbar, weil die Kreislinie als geometrischer Ort des Treffpunktes zweier Impulse dient. Dies wird z.B. benutzt, um beim Stoß zweier gleicher Massen, wo der Kreis zum Thaleskreis wird, den entstehenden rechten Winkel zwischen p_B und p_R zu demonstrieren. Ansonsten gleicht das Impulsdreieck dem von Abb. 8, wenn man es horizontal an der Abszisse spiegelt. Man gewinnt (5) über den Kosinussatz, wobei p_R dem Winkel φ gegenüberliegt. Die Beziehung (5) gilt sowohl in der klassischen als auch relativistischen Mechanik, was man von der besagte Kreisfunktion nicht behaupten kann, sie verliert in der Relativitätstheorie ihre Bedeutung.

8. Physik und Mathematik in der Impulswelt

Eigentlich sollte nicht von Mathematik, sondern nur vom Dreieck die Rede sein. Die Relativitätstheorie lässt sich bereits mit Lineal und Zirkel [6] behandeln, auch eine spezielle Hebelanordnung [7] genügt. Doch zurück zum Konzept der Impulse als Seitenhalbierende! Wie gelangt man von den drei Impulsen zu dem umhüllenden Dreieck? Bereits zu Zeiten des Heron von Alexandria war es vermutlich möglich, aus den Dreiecksseiten a , b , c die drei Seitenhalbierenden s_a , s_b , s_c zu ermitteln, und zwar nach der Beziehung: $2^2 \cdot s_a^2 = 2 \cdot (b^2 + c^2) - a^2$. Durch zyklische Vertauschung erhält man die übrigen besagten Größen. Dies ermöglicht es, beim Vorliegen ganzer Seitenlängen 3, 4, 5 alle Seitenhalbierenden als Funktion ganzer Zahlen auszudrücken. Was nun interessiert, ist die Umkehrung, nämlich aus den Seitenhalbierenden die Dreiecksseiten zu erhalten. Man kann davon ausgehen, dass diese Aufgabe sicherlich spätestens nach den Erkenntnissen von F. Vieta gestellt wurde. Ob damals eine Lösung gefunden wurde, konnte von den Autoren nicht nachgewiesen werden. Es zeigte sich jedoch mehr oder weniger zufällig, dass die gesuchte Umkehrung ziemliche Ähnlichkeit hat mit

den bekannten Ausgangsgleichungen, siehe Abb. 10, linke Spalte.

Schulbuch-Mathematik		Impuls-Physik
$s_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot (b^2 + c^2) - a^2}$		$p_R = \sqrt{2 \cdot (X^2 + Y^2) - O^2}$
$s_b = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot (a^2 + c^2) - b^2}$		$p_S = \sqrt{2 \cdot (O^2 + Y^2) - X^2}$
$s_c = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot (a^2 + b^2) - c^2}$		$p_T = \sqrt{2 \cdot (O^2 + X^2) - Y^2}$
(6)		
$a = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2 \cdot (s_b^2 + s_c^2) - s_a^2}$		$O = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2 \cdot (p_S^2 + p_T^2) - p_R^2}$
$b = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2 \cdot (s_a^2 + s_c^2) - s_b^2}$		$X = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2 \cdot (p_R^2 + p_T^2) - p_S^2}$
$c = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2 \cdot (s_a^2 + s_b^2) - s_c^2}$		$Y = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{2 \cdot (p_R^2 + p_S^2) - p_T^2}$

Abb. 10: Seitenlängen und Seitenhalbierende

Die Interpretation von Seiten als Impulse ist problematisch. Es entsteht eine babylonische Sprachverwirrung, wenn Längen und Impulse nicht scharf getrennt werden. Die elektromagnetischen Wellen haben beides, einmal die Wellenlänge und einmal reziprok dazu die Wellenzahl. Letztere ist die dem Impuls proportionale Größe. Auch unser Dreieck besteht aus einer Welt der Längen und reziprok dazu aus einer Welt der Wellenzahlen. Die Einführung der Wellenzahl, deren Einheit cm^{-1} früher mit dem Namen 1 Kayser belegt worden war, ist eine praktische Maßnahme, doch noch praktischer wäre es, wenn man auf eine reziproke Impulseinheit (die „Impulszahl“) zurückgreifen könnte. Es gibt sie nicht. Unsere Dreieckseiten O, X, Y haben den Charakter von auf Impulsen basierenden Längen. Der Sonderstellung wegen soll jede dieser „Dreieckseiten“ als *Gravon* bezeichnet werden. Das Gravon ist nämlich ein Mittelding zwischen einem Photon, einem virtuellen Photon und einer zeitweise in Strahlung verwandelter Ruhmasse. Gravonen können nicht separat existieren, sie bilden gewissermaßen einen eckigen Ringvektor. Die drei Gravonen unseres Paradebeispiels mit den Werten 3, 4, 5 ergeben ein Dreieck, welches ebenfalls eine alternative Bezeichnung erhalten soll. Diese Regelung ermöglicht es nun, einige Sätze am Dreieck zu finden, die später auf das Impulsdreieck umgemünzt werden. So sollen später beim Übergang von der Mathematik zur Physik beispielsweise folgende Entsprechungen entstehen: Seitenhalbierende \rightarrow Teilchenimpuls, Dreieckseite \rightarrow Gravon, Seitendifferenz am Punkt A \rightarrow Gravonendifferenz Z_A , welche letztere eine proportionale Größe zur kinetischen Energie darstellt. Der Anspruch, hier eine Regelung für die ganze Impulswelt zu treffen, ist zu hoch, es handelt sich um die Physik des Dreiecks oder der geschlossenen Impulse. Die Forderung, dass z.B. beim Stoß unabhängig voneinander Impulssatz und Energiesatz gelten sollen, wird überflüssig, wenn man die Aufgabe in ein Dreieck bzw. Vieleck einbettet. Hier wird vieles sozusagen automatisch geregelt. Das Dreieck umschließt lt. Kimberling [8] hunderte charakteristische Punkte, von denen hier einige wie der Schwerpunkt benutzt werden. In der Physik tritt noch der Unterschied zwischen radialen und

peripheren Größen auf. Die Seitenhalbierenden sind radial, die Dreieckseiten sind peripher.

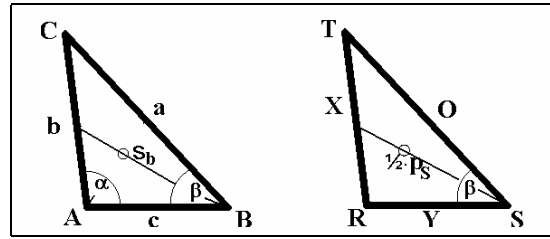


Abb. 11: Gegenüberstellung der Dreiecksbezeichnung nach konventionell mathematischer und nach physikalischer Art. Das linke Dreieck mit den Dreieckseiten a, b, c entstammt einem Schulbuch. Die Winkel α, β, γ sind jeweils nach der gegenüberliegenden Seite benannt. Eine der drei Seitenhalbierenden, und zwar s_b , ist eingezeichnet. Die Strecke s_b schneidet die Seite b am Halbierungspunkt. Außerdem ist der Schnittpunkt aller Seitenhalbierenden als kleiner Kreis markiert. Die Eckenbezeichnung zwischen dem linken und dem rechten Dreieck unterscheidet sich, die Ecken A, B, C liegen mit Rücksicht auf das folgende Vorhaben anders und werden durch R, S, T ersetzt. Die Philosophie beim rechten Dreieck ist einfach die, dass der Eckpunkt S Ort eines Ereignisses ist, bei dem der Impuls $\frac{1}{2} \cdot p_S$ gebraucht wird und anstelle der Seitenhalbierenden tritt. Die Bezeichnung der Winkel soll vorerst unverändert bleiben. Die Terminologie des rechten Dreiecks ist nicht identisch mit dem eingangs erwähnten Impulsdreieck von Abb. 7.

Beim nachfolgenden Vergleich mit der Physik ist vorab zu unterscheiden, ob alle Ecken des Dreiecks gleichberechtigt sind. Da das Dreieck mit dem Zweierstoß identifiziert wird, muss die Startkugel bei der Ecke S (wie Start) eintreten und bei Ecke R (wie Reflexion) austreten. Die Ecke T (wie Target) wird von dem in Ruhe befindlichen Partner besetzt. Dies ist verträglich mit der Festlegung $a > b > c$ bzw. mit den Impulsgrößen $O > X > Y$. Infolge der drei Seiten existieren drei Differenzen d_A, d_B, d_C je zweier benachbarter Seiten. Mit der Zuordnung der Seiten $a > b > c$ ergibt sich als größte Differenz bei der Schulbuchvariante an der mit B bezeichneten Ecke $d_B = a - c$. Analoges gilt für $d_A = b - c$ und $d_C = a - b$. Infolge der Größenzuordnung und aus anderem Grunde erhält man $d_B = d_A + d_C$, d.h. die beiden kleineren Differenzen haben sozusagen dasselbe Gewicht wie die große Differenz d_B . Es wird im Weiteren die zweigleisige Form benutzt, indem neben den Differenzen d die analogen physikalischen Differenzen z aufgeführt werden. Bei den z -Werten soll die Indexierung etwas großzügig entweder nach der Ecke im Dreieck A, B, C oder nach dem jeweiligen Stoßort an Ecke R, S, T gehandhabt werden, vergleiche (7).

(7)	$d_B = d_A + d_C$,	$Z_S = Z_R + Z_T$	($Z_A = Z_R + Z_B$)
(8)	$c = d_B + d_A$,	$Y = Z_S + Z_R$	($= Z_A + Z_R$)

Die kleinste Dreieckseite c lässt sich überraschend aus den Differenzen d_B und d_A mit einer unscheinbaren Nebenbedingung (8) berechnen. Die beiden Differenzen d_B und d_A (bzw. z_A und z_R) befolgen einen Flächensatz, der eine Brücke schlägt zum Radius R_0 des Inkreises. Dieser hat den Wert 1 für das Dreieck des Parafalls mit den Seiten 3, 4, 5. Die Seitenhalbierenden zerlegen das Dreieck in sechs Sektoren. Umfährt man das Dreieck, so überstreicht der Fahrstrahl pro Takt gleiche Flächen, im Parafall je Sektor mit Fläche 1.

$$4 \cdot R_0^2 = 2 \cdot d_B \cdot d_A \quad |,| \quad 4 \cdot R_0^2 = 2 \cdot z_S \cdot z_R$$

$$4 \cdot R_0^2 = s_b^2 + s_a^2 - s_c^2 \quad |,| \quad 4 \cdot R_0^2 = p_S^2 + p_R^2 - p_T^2$$

$$(9) \quad 2 \cdot d_B \cdot d_A = s_b^2 + s_a^2 - s_c^2 \quad |,| \quad 2 \cdot z_S \cdot z_R = p_S^2 + p_R^2 - p_T^2$$

Es war bereits die Rede von radialen und peripheren Größen beim Dreieck, und so gesehen sind s -Werte radial und d -Werte peripher. Die letzte Zeile (9) lässt den Zusammenhang der z -Werte (kinetische Energien) mit den p -Werten (Teilchenimpulsen) erkennen. Wenn hier das Wort Energie am Rande neben dem Impuls auftaucht, dann ist dies kein Hinweis auf eine Kleinigkeit oder Spitzfindigkeit. Ganz im Gegenteil geht es um relativistische Grundaussagen über Impuls und Energien, insbesondere um die noch später zu betrachtende Beziehung (13), hier verkürzt als $(m_{0A}^2 + p_A^2) = (m_{0A} + z_A)^2$ mit $c=1$, in der außer z und p noch die Ruhmasse von A auftaucht.

In der Mechanik wird stets betont, dass neben der Impulserhaltung noch die Energieerhaltung zu berücksichtigen ist, übrigens eine Angelegenheit, über die in den letzten dreihundert Jahren schon viele Physiker ihre Verwunderung ausgesprochen haben. In der SRT und entsprechend in (14) sind Impuls, kinetische Energie und Gesamtenergie eng miteinander verknüpft, und in der Schreibweise mit p und z wird dies für jedes einzelne Teilchen besonders deutlich. Beim Zweierstoß im Laborsystem wird üblicherweise ein Vierervektor erforderlich, aber in der hier am Dreieck praktizierten Weise *verschmelzen Impulserhaltung und Energieerhaltung* zu einem geradezu trivialen Trio, indem jedem Vektor eine Ecke zugeteilt wird und indem die Dreieckseiten das übrige regeln. Wie p und z konkret an der Ecke A reagieren, das beschreiben (9), (13), für die Ecken B und R gilt dies analog. Eine zyklische Vertauschung im Dreieck kann wegen (8) nicht funktionieren.

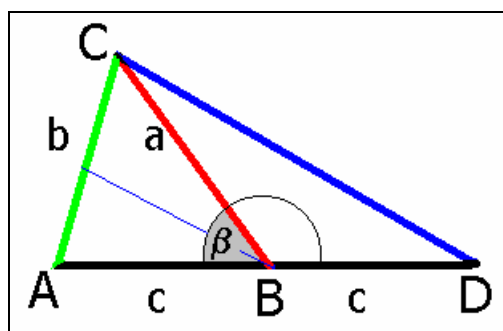


Abb. 12: Dreieck mit den Ecken A B C und den gegenüberliegenden Seiten a b c. Zum Winkel β existiert ein Supplementwinkel, der als stumpfer Winkel zu dem benachbarten Dreieck BCD gehört. Beide Dreiecke besitzen als Gemeinsamkeit zwei Seiten, nämlich die Seite a und die Seite c. Es wurde eine der drei Seitenhalbierenden s_b eingezeichnet, welche die Seite b halbiert. In den weiteren Ausführungen spielt das Bild eine Rolle.

9. Eine geometrischen Ableitung des Comptoneffekts und der Relativität

Hier wird bereits vorweg auf die im Abschnitt 12. gestellte Frage „Wie kommt die Relativistik unversehens in den klassischen Ansatz?“ eine Antwort gegeben. Mehr noch, es soll bewiesen werden, wie man vom Dreieck zum relativistischen Zweierstoß gelangen kann, und zwar ohne direkte Benutzung der Relativitätstheorie, abgesehen vom unentbehrlichen Ruhmassebegriff. Man nehme ein allgemeines Dreieck, wie es in der Schulmathematik bezeichnet wird, siehe Abb. 12 und 13. Die Seitenhalbierenden, die eine große Rolle spielen, werden durch s_b repräsentiert, siehe Formel 6 (mit Stern gekennzeichnet). Da die Gleichungen zyklisch vertauschbar sind, hätte man gleichberechtigt jede andere auswählen können.

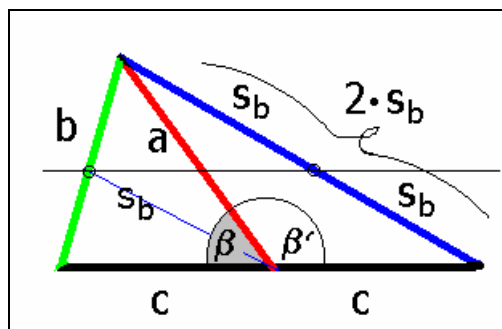


Abb.13: In Ergänzung zu Abb. 12 wird die Seitenhalbierende s_b eingehend betrachtet, sie halbiert die Seite b, angezeigt durch einen kleinen Kreis. In Höhe dieses Kreises wurde eine durchgehende horizontale Gerade gelegt, welche auch die rechte Seite, die sich als eine Zusammenfassung von $s_b + s_b$ erweist, halbiert.

Der Kosinussatz ergibt zwei Gleichungen, die wegen $\beta' = (\pi - \beta)$ und $\cos(\beta) = -\cos(\beta')$ zu Formel (***) führen, und zwar als Summe von (*) und (**):

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta) \quad *$$

$$(2 \cdot s_b)^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta')$$

$$(2 \cdot s_b)^2 = a^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta) \quad **$$

$$(2 \cdot s_b)^2 = 2 \cdot (a^2 + c^2) - b^2 \quad ***$$

$$s_b = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 \cdot (a^2 + c^2) - b^2} \quad \text{siehe (6)}$$

Es wird nun letztlich von Abb. 13, genauer von (**) ausgegangen und erweitert durch $-1+1$

$$(2 \cdot s_b)^2 = a^2 + c^2 + 2 \cdot a \cdot c \cdot (-1 + 1 + \cos(\beta))$$

dann ausmultipliziert

$$(2 \cdot s_b)^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot a \cdot c \cdot (1 + \cos(\beta))$$

und zu einem Binom zusammenfasst

$$(2 \cdot s_b)^2 = (a - c)^2 + 2 \cdot a \cdot c \cdot (1 + \cos(\beta))$$

und im letzten Glied erweitert.

$$(2 \cdot s_b)^2 = (a - c)^2 + 2 \cdot a \cdot c \cdot (1 + \cos(\beta)) \cdot (a-c)/(a-c)$$

Nun wird quasi eine Hilfsgröße m_B eingesetzt

$$m_B = (1 + \cos(\beta)) / (1/c - 1/a)$$

$$m_B = (1 + \cos(\beta)) \cdot c \cdot a / (a - c)$$

$$(2 \cdot s_b)^2 = (a - c)^2 + 2 \cdot m_B \cdot (a-c)$$

Es werden Differenzgrößen eingeführt $d_B = a - c$:

$$d_A = b - c; \quad d_C = a - b$$

$$(2 \cdot s_b)^2 = d_B^2 + 2 \cdot m_B \cdot d_B$$

Ersetzen von $2 \cdot s_b$ durch den Impuls p_B sowie

Ersetzen von $Z_B = d_B$ und so weiter für Z_A und Z_R

$$p^2 = z^2 + 2 \cdot m_B \cdot z$$

beiderseitig Erweitern mit m_B^2

$$m_B^2 \cdot p^2 + z^2 = z^2 + 2 \cdot z \cdot m_B + m_B^2$$

zu einem Binom zusammenfassen

$$m_B^2 \cdot p^2 + z^2 = (z + m_B)^2$$

Einsetzen der zyklisch vertauschbaren Indizes

$$m_B^2 + p_B^2 = (Z_B + m_B)^2$$

$$m_{0B}^2 \cdot e^4 + p_B^2 \cdot e^4 = (m_{0B} \cdot e^2 + Z_B \cdot e^2)^2 \text{ korrekte Schreibweise, siehe (14)}$$

$$= E_{\text{gesamt}}^2 \quad \text{Impulsformel nach Einstein}$$

Nach all dem Gesagten wird versucht, mit der Lehre vom Dreieck eine Formel abzuleiten, die von Compton experimentell gefunden wurde und die das Zeug hat, Weltformel genannt zu werden. Man erfährt, was die „Bewegung“ eines Teilchens eigentlich bedeutet. Man umschreibt sie durch zwei Photonenimpulse als Seiten eines Dreiecks. Wie vorseitig bereits ausgeführt, wird eine Hilfsgröße m_B verwendet. Um schneller zum Ziel zu kommen, wird die trigonometrische Terminologie des Schulbuchs verlassen und nur noch die rechts stehende Variante von Abb. 11 benutzt, die auszugsweise in Abb. 14 zu sehen ist. Es wird die Frage gestellt, wie man die Seiten O und Y mit dem eingeschossenen Winkel α allgemein in Verbindung bringen kann. Aus einem Taschenbuch der Mathematik (Bronstein, Semendjajew [9]) kann man eine Formel entnehmen, in der der halbe Umfang H des Dreiecks und der halbe Winkel vorkommen: $\sin(\alpha/2) = \sqrt{((H-O) \cdot (H-Y))/(O \cdot Y)}$. Zum ganzen Winkel gelangt man entweder durch Verdopplung oder mittels der trigonometrischen Funktion $2 \cdot \sin^2(\alpha/2) = 1 - \cos(\alpha)$. Um die avisierte „Verschiebungsformel“, die den Supplementwinkel von α enthält, in der gewohnten Form zu bekommen, wird der Winkel α' , der α zu 180° ergänzt, hergeleitet, wozu eine Regel angewandt wird, nämlich $\cos \alpha' = -\cos \alpha$. Die Verschiebungsformel enthält die Größe $(1 - \cos \alpha')$, die den Vorzug hat, alle Winkel (in der Physik unter dem Namen Streuwinkel bekannt) von 0° bis 180°

zu umfassen, wobei beide Vorzeichen vorkommen können.

Man gelangt bei der abstrakt mathematischen Zielsuche zu einer Zwischenformel $(1 - \cos \alpha') = 2 - 2 \cdot ((H-O) \cdot (H-Y))/(O \cdot Y)$, die nun noch eine aufwendige Umformung und Substitution der bereits erwähnten Formeln erfährt, bis endlich die gesuchte Verschiebungsformel (10) gefunden wird.

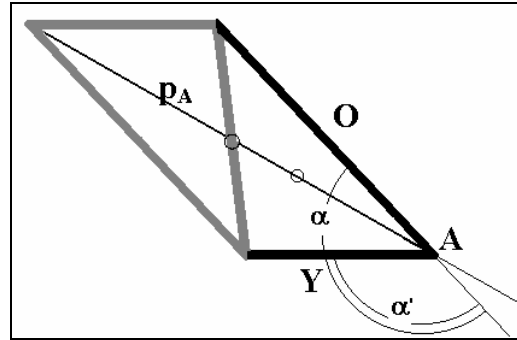


Abb. 14: Auszug aus der Abb. 11. Die rechte Seite, gespiegelt und gewendet, ergibt das graue Dreieck. Man kann den Impuls in ganzer Länge unterbringen. Zum Winkel α gehört α' als Supplementwinkel. Kleine Kreise markieren den Schwerpunkt bzw. die Seitenhalbierende, die X als mittlere Seite halbiert.

$$(10) \quad (1/Y - 1/O) = 1/(2 \cdot H) \cdot (1 - \cos \alpha')$$

$$(11) \quad (1/Y - 1/O) = 1/m_{0A} \cdot (1 - \cos \alpha')$$

Die mathematische Verschiebungsformel (10) ist eine von noch anderen Ableitungsergebnissen, wie z.B. auch $(1/Y + 1/O) \cdot (O + Y)/2 - X^2/(2 \cdot O \cdot Y)$, die hier nicht weiter interessiert. Die physikalisch analoge Formel (11) tritt beim Comptoneffekt auf, von dem bereits im Kapitel 2 die Rede war. Wir erinnern, dass im Punkt A in Abb. 14 ein Stoßereignis stattfindet, bei dem ein Photon mit dem Impuls Y ein bewegtes Teilchen m_A elastisch stößt und dieses zum Stillstand bringt unter Aussenden eines energiereichen Photons mit dem Impuls O. Der Impuls ist hier umgekehrt proportional zur Wellenlänge, so dass O eine kleinere Wellenlänge als Y hat. Es ist eine verzwickte Sache, wenn in Abb. 14 ein Impulsdreieck gezeichnet wird, dessen Kehrwerte Längen, genauer je einen Wellenzug bilden sollen. Man muss sich damit begnügen, dass die Natur ein Doppelgesicht hat, welches in getrennten Bildern einmal als Impulswelt und einmal als Welt der Wellenlängen aufgezeichnet werden kann. Ganz kleine Impulse ergeben zwangsläufig ganz große Wellenlängen. Die Rolle des eingeschlossenen Winkels ist besonders prekär, man kann den Winkel *sicher* nur im Impulsraum anwenden.

Zwischen der geometrischen Gleichung (10) und der formal ähnlichen Verschiebungsformel von Compton (11) besteht insofern ein himmelweiter Unterschied, als erstere einen mechanischen

Zweierstoß und letztere eine Photonen-Wechselwirkung mit einer Ruhmasse beschreibt. Einzelphotonen gehören in die Zuständigkeit der Quantenmechanik, wengleich die in der Stossdynamik übliche Darstellung, wie sie in Abb. 2 skizziert ist, gerade noch als opportun gilt. Es ist aber ein Charakteristikum des vorliegenden Konzepts, dass der mechanische Stoß so dargestellt wird, als wenn die Einzelschritte durch virtuelle Photonen vermittelt würden. Dies wurde allgemein bereits in Kapitel 2 ausgeführt und wird in Abb.15 auf drei Comptoneffekte und drei Teilchenimpulse angewandt.

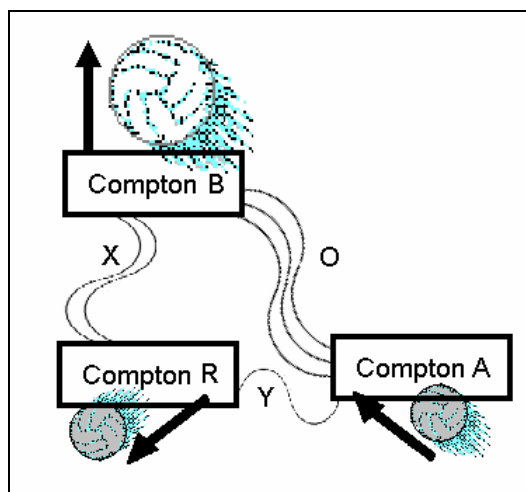


Abb.15: Schaltungs-Schema der drei Bausteine, verknüpft durch Photonenimpulse O, X, Y, welche durch Dreifachlinien, Doppellinien und Einfachlinie markiert sind. Der große helle Ball symbolisiert die in Bewegung versetzte große Ruhmasse m_B . Der graue Ball kennzeichnet die einfallende Stoßmasse m_A , die unter dem Namen m_R das Stoßgeschehen wieder verlässt, denn $m_A = m_R$. Der Index R soll bei der austretenden Masse an Reflexion erinnern. Beim Baustein Compton B wird der als großer Ball B skizzierte Stoßpartner gestartet, wobei das energiereiche Photon O eintritt und das energetisch geschwächte Photon X austritt. Im gleichen Zug wird die Wellenlänge zwar größer, doch dieses Thema sollte man besser ignorieren und nicht zu veranschaulichen versuchen.

An jeder Ecke des Impulsdreiecks findet ein Comptoneffekt statt, ein Ereignis, welches am besten als Baustein behandelt wird. In jedem Baustein ist ein eintreffender oder ein ausgesandter Teilchenimpuls verankert, je nachdem, ob der Comptoneffekt invers oder regulär verläuft. Dieses komplexe Verbundsystem mit zirkulierenden Photonen mag eigenartig erscheinen, noch merkwürdiger ist die geometrische Ableitung aus den Seitenhalbierenden eines gewöhnlichen Dreiecks. Die Ableitung betrifft den Einzelbaustein als auch das Gesamtbild von Abb. 15. Für große Überraschung sorgt aber die aus (10) und (11) hervorgehende Feststellung: $2 \cdot H = m_A$. Der Sachverhalt wird in Gleichung (12) noch einmal

ausgedrückt und besagt, dass der Seitenumfang des Kreisprozesses bzw. des Dreiecks gleich dem Ruhmasseimpuls $m_A \cdot c$ ist. Sollte Einstein übersehen haben, dass die Ruhmasse nicht ein Massenpunkt, sondern ein Feld ist, welches die Bewegungsimpulse umrandet? Die Vergasung der Ruhmasse von Einstein ist eine ungeheuerliche Vorstellung. Wer Lust am Weiterdenken hat, der kann sich ausmalen, wie dann ein Neutronenstern oder wie ein stoßendes Neutron aussieht. Praktischer ist es, die Hintergründe und die Verallgemeinerung zu untersuchen. Die besagte geometrische Ableitung geschah nicht ohne jede Voraussetzungen, es wurde Bezug genommen auf Abb. 7 und indirekt können beim Übergang von der Geometrie zur Physik einige Kriterien eine Rolle spielen, die nachfolgend aufgezählt und diskutiert werden sollen.

10. Kriterien für den schulgerechten Stoß

1. Kriterium: Die kinetischen Energie Z_A soll gemäß (7) erhalten bleiben.
- 2a. Kriterium: Zwei Ruhmassen (hier m_{0A} und m_{0R}) sollen gleich sein.
- 2b. Kriterium: Die Summe $Z_A + Z_R$ soll gemäß (8) dem Wert Y entsprechen.
- 2c. Kriterium: Die kleinste Seite Y soll das Dreifache von $O + X$ sein.
- 2d. Kriterium: Die kleinste Seite Y soll ein Viertel der Masse m_{0A} sein.
- 2e. Kriterium: Der Seitenumfang $O + X + Y$ soll gemäß (12) gleich m_A sein.
3. Kriterium: Der Verbund der Comptonbausteine muss plausibel sein.

Zum Kriterium 1 sei bemerkt, dass die Seitendifferenzen mit der Zuordnung $a > b > c$ nicht zwingend zur Relation (7) führen. Es geht um die Unterscheidung zwischen der Szene vor und nach dem Stoß. Nach (7) werden folgerichtig ausgeschlossen die gleichschenkligen und die gleichseitigen Dreiecke, welche sich in der Tat nicht für den Comptoneffekt eignen. Mit $z=0$, d.h. ohne kinetische Energie d.h. ohne unterschiedliche Photonenimpulse funktioniert kein Comptoneffekt. Interessant ist allerdings die Frage, ob die besagte Energieerhaltung aus der Trigonometrie zwingend hervorgeht. Es besteht eine Mitwirkung der drei Teilchenimpulse gemäß Abb. 8 (unteres Bild), wo ebenfalls zwischen vorher und nachher unterschieden wird. Ansonsten ist es jedoch unwahrscheinlich, dass allein die Zuordnung $a > b > c$ für die Erhaltung der kinetischen Energie verantwortlich ist. Die besagte Energieerhaltung gilt in der klassischen Mechanik und natürlich auch in der relativistischen Stoßmechanik, sofern die Ruhmassen beim Stoß erhalten bleiben, wie es das Kriterium 2a. fordert. Wenn das stoßende Teilchen verändert wird, dann muss das Kriterium 1 etwas präzisiert werden. Dasselbe trifft auch zu, wenn das

ruhende Target beim Stoß eine Veränderung der Ruhmasse erfährt.

Die unter Nummer 2 zusammengefassten Kriterien können nur gemeinsam behandelt werden, sie bedingen offensichtlich einander. Sie verkörpern nicht *viele* Nebenbedingungen, sondern eben nur eine. Es gibt noch mehrere solcher gleichrangiger Nebenbedingungen, wie hier nur angedeutet werden kann. Was sind schulgerechte Stöße und wie gelangt man zu ihnen? Alle als Kriterium 2 aufgeführten Bedingungen hängen zusammen, und wenn allein eine erfüllt ist, dann liegt formal gesehen ein schulgerechter Stoß vor. Als Zugang wird vorgeschlagen, dass man zwei kinetische Energien (gleichbedeutend mit zwei Z-Werten) vorgibt. Dieser Zugang, der über die Z-Werte, genauer über das Wertetripel Z_A, Z_B, Z_R erfolgt, soll „Rydberg-Ritz-Einstieg“ genannt werden. Gemäß Kriterium 1 genügt es, wenn nur zwei dieser Z-Werte vorgegeben werden. Erzeugt man also durch Kombination beliebige Wertepaare Z_A, Z_R dergestalt, dass natürliche Zahlen $Z_A > Z_R$ entstehen, dann erhält man Wertetripel, die unter Zuhilfenahme der anderen Kriterium 2 Scharen von physikalisch realen Stoßszenarien liefert.

Ob man physikalisch bei Vorgabe von drei kinetischen Energiewerten einen Zweierstoß eindeutig determinieren kann, hängt auch von den physikalischen Energie-Einheiten ab. Hier wird nur die Vorgabe zweier dimensionsloser Zahlen verlangt, denn die Einheiten stellen sich mit der Maßgabe $\epsilon=1$ von selbst ein.

Der schulgerechte Stoß zeichnet sich unter anderem dadurch aus, dass die ruhende Masse größer ist als die stoßende Masse. Was die *ganzen* Zahlen anbetrifft, so muss gesagt werden, dass es keine Veranlassung für eine Forderung nach Ganzzahligkeit gibt. Allein praktische Erwägungen führen dazu, vorzugsweise ganze Zahlen zu verwenden. Die Forderung nach Ganzzahligkeit wäre eine *hausgemachte* Forderung, die zunächst nichts mit Physik zu tun hat.

Allerdings hat es den Anschein, als wenn die Mathematik ganze Zahlen protegirt, insbesondere beim Zusammentreffen von reziproken und nichtreziproken Entitäten. Die Strategie und Philosophie des Vorgehens ist nicht die Berechnung von Stoßaufgaben, sondern die Tabellierung aller möglichen Fälle. Selbst wenn man sich nur auf die ganzen Zahlen beschränkt, entsteht ein ungeheuer großes Datenmassiv, das nur im unteren Zahlenbereich etwa bis 1000 auf dem PC zugänglich ist. Die Ganzzahligkeit erlaubt es, systematisch Lösungen mit Entwicklungs-Formeln zu berechnen. In dieser Form zu Serien zu gelangen ist ungleich einfacher, als mit rechentechnisch großem Aufwand gewünschte Fälle auszuwählen. Diese Art von elektronischer Selektion hätte zudem den üblen Beigeschmack einer Datenmanipulation. Doch weiter zu den Impulsen!

Die radialen Impulslängen, die bisher nur als Seitenhalbierende auftraten, sind mit dem Rüstzeug

der Physiker relativ einfach als gewöhnliche Teilchenimpulse zu verstehen, wenngleich die Maßeinheiten bisher zu wünschen ließen. Indessen scheint aber Beziehung (20) geeignet, um die offenen Fragen zu klären, unter anderem sollte man dazu trotz $\epsilon=1$ das Zeichen ϵ konsequent einsetzen, d.h. $Z_A \cdot \epsilon \cdot Z_R \cdot \epsilon$. Nun zur Größe Z, die bereits in (8) aufgetaucht war. Die Energieerhaltung fordert, dass beim Comptoneffekt die Differenz der Energie beider Photonen und die relativistische Energie des Teilchens A einander bedingen, genauer $O-Y=Z_A \cdot c$, meist jedoch wegen $\epsilon=1$ vereinfacht geschrieben. Man wird berechtigt fragen, wozu überhaupt ϵ ? Bisher wurde unterstellt, Z sei eine Impulsgröße, ebenso wie O, X, Y dies sein sollten. Bei unseren Stößen geht es nun nicht exakt um Photonen, sondern um die deklarierten Gravonen. Die Differenz der Gravonen ergibt so etwas wie die kinetische Energie, so lautet die aktuelle Interpretation der peripheren Impulslängen im Dreieck. Aufklärung erhält man aus der Tatsache, dass eine jede Ruhmasse bei der Bewegung eine relativistische Zunahme Z der Masse erfährt, deren Bezeichnung Z einleuchtend sein sollte, siehe (15).

Diese Zunahme ist in Form von $Z \cdot \epsilon^2$ nichts anderes als die kinetische Energie. Der entsprechende Impuls $Z \cdot \epsilon$ dürfte von den Physikern allerdings keine Zustimmung finden, weil man den Impuls so *normalerweise* nicht berechnet. Wir deklarieren die Ruhmasse A als Summe der virtuellen Massen, die den Impulsdreieckseiten entsprechen.

11. Photonen und Gravonen

Der Comptoneffekt funktioniert mit Photonen, die im Prinzip nur eine fiktive Ruhmasse μ besitzen, während der Zweierstoß auf Gravonen zurückgeführt wird, die eigentlich vermuten lassen, dass sie sich auf die Teilchenmassen beziehen. Man kann geteilter Meinung sein, denn ebenso wie bei der Energie $\mu \cdot \epsilon^2$ und beim Impuls $\mu \cdot \epsilon$ eines Photons lassen sich für die fiktive Masse Z eines Gravons gleiche bzw. analoge Größen ermitteln. Was ist eigentlich Ruhmasse? Der geschilderte Versuch einer abstrakt geometrischen Ableitung der Verschiebungsformel für Wellenlängen des Comptoneffekts gibt eine überraschende Antwort. Ruhmasse soll dem Wesen nach nicht eine Punktmasse sein, wie man bisher geglaubt hat, sondern es soll eine verteilte Verankerung in den Seiten des Dreiecks, d.h. in den Gravonen vorliegen. Die Formel mit Werten des Paradebeispiels besagt:

$$(12) \quad m_{0A} \cdot \epsilon = O+X+Y = 12.$$

Die abgeleitete Formel (10) enthält im Nenner den Ausdruck $2 \cdot H$, das ist nichts anderes als die Summe der Dreieckseiten. Die Abkürzung H erinnert an Halbsumme und an Heron, der den Begriff offensichtlich in die Dreieckslehre eingeführt hat. Doch was hat dies mit Masse zu tun? Aus dem Impulsdreieck kann man keine Masse herausfinden,

wohl aber lassen sich *Impulse* der Ruhmasse zuordnen. So besteht im Parade Fall das Gravon X aus $4/12 m_{0A} \cdot c$ und das Gravon Y aus $3/12$ d.h. 25% von $m_{0A} \cdot c$. Die gesamte Ruhmasse A wird zu 100% aufgeteilt und ergibt einen Heiligenschein gleich einem Magnetfeld, einem dreieckigen Ringvektor. Wie schon oft bemerkt, besteht Materie aus Licht [10], und hier entsteht aus Gammaquanten bzw. aus den Seiten des Impulsdreiecks eine Ruhmasse A. Die Masse B erscheint nicht direkt, ihre Rolle wird bei dem Schwerpunktsstoß deutlich. Das Dreieck ist eine Stoßzelle, die offenbar nicht nur eine Nanosekunde existiert, sondern die den Stoßvorgang vorher und nachher kontrolliert bzw. realisiert, bis die Partner einen nachfolgenden neuen Stoß ausüben. Dazu dürfte bereits ein Feldquant sozusagen gleich um die Ecke genügen. Dieser noch spekulative Nachfolgemechanismus mit Anfang und Ende ist nur ein Versuch, das Wesen der Bewegung (von Materie inklusive Licht) zu erklären, für unseren Zweierstoß im Laborsystem ist dies jedoch ohne Belang.

Bemerkenswert ist, dass die Verschiebungsformeln (10 und 11) nichts explizit über den Teilchenimpuls aussagen. Das legt den Verdacht nahe, dass die Photonen bzw. die Gravonen den Charakter eines Überbaus haben, während die Teilchen mit ihren Geschwindigkeiten und relativistischen Massen untergeordnet sind und nur den Unterbau verkörpern. Was die Winkelfunktion in beiden Formeln anbelangt, so scheint es, als ob die (reziproke) Ruhmasse *prozentual aufgeteilt* wird, was in (11) beim Zweierstoß in ähnlicher Weise soeben beobachtet wurde.

O	Y	O-Y		1/O	1/Y
500,00000	7,38916	492,61084		0,0020	0,1353
50,00000	6,52174	43,47826		0,0200	0,1533
5,00000	3,00000	2,00000		0,2000	0,3333
0,50000	0,46875	0,03125		2,0000	2,1333
0,05000	0,04967	0,00033		20,0000	20,1333
für die Verschiebung gilt konstant:				1/Y-1/O = 0,1333	

Abb. 16: Die Verschiebungsformel von Compton, angewandt auf die Ecke A eines Dreiecks mit den Photonenimpulsen $O=5$, $X=4$ und $Y=3$. Auf der rechten Seite sind Wellenlängen bzw. präziser gesagt reziproke Impulse aufgelistet. Des Weiteren sind zeilenweise maßstäbliche Veränderungen in Zehnerpotenzen angegeben. Der Streuwinkel zwischen den Photonen O und Y besitzt einen Kosinus von -0,6 entsprechend einem Winkel von ca. 127° . Alle Eintragungen der Tabelle haben eine einheitliche Maßeinheit (z.B. in GeV/c), auch die Ruhmasse $m_A = 12$ wird in diesen Einheiten gemessen und für die Tabelle konstant gehalten, ebenso wie der Winkel. Das Photon mit dem Impuls O wird in Dekadenstufen vorgegeben, und das Photon mit Impuls Y stellt sich ein gemäß der Formel $1/Y = (1+0,6)/12 + 1/O$.

Ein Dreieck lässt sich mit seinen Funktionen beliebig vergrößern und verkleinern, wie steht es mit

der Verschiebungsformel? Man nehme eine Ruhmasse $m_A=12$ mit einem Impuls von $12 \text{ GeV}/c$ und einer umgerechneten Energie von 12 GeV . Zum Vergleich, der Atomkern eines Kohlenstoffatoms hat ungefähr diese Ruhenergie und wäre ein willkommener Stoßpartner, wenn die Ladung nicht wäre. Dasselbe trifft für das Target $m_B=36$ zu, welches etwa einem Atomkern von Chlor entspräche. Noch niemand hat Ruhmasse gesehen oder gefühlt, nur über ihren Impuls macht sich z.B. die bewegte Billardkugel bemerkbar. Und unsere Ruhmasse in Abb. 16 wird letztlich durch die Photonen und ihre Wellenlängenverschiebung erkennbar. Das Experiment kann theoretisch mit beliebigen Wellenlängen durchgeführt werden, die Verschiebung $1/Y-1/O$ hat stets wegen der konstanten Ruhmasse und dem ausgewählten festen Streuwinkel den Wert $0,1333$. Anders sieht es mit der Impulsdifferenz $O-Y=Z_A$ aus, sie ändert sich fast quadratisch mit dem Maßstab. Übertragen auf Gravonen und den Kugelstoß bedeutet dies, dass das Paradebeispiel mit den Strahlungsimpulsen 5 und 3 nur so mit den Massen 12 und 36 funktioniert, wie es in der mittleren Tabellenzeile angezeigt ist. Die Impulse der Ruhmasse und die regulären Teilchenimpulse müssen in derselben Größenordnung liegen. Gefordert wird nach (9) Gleichheit zwischen den Quadraten der Teilchenimpulse und dem Produkt $Z_A \cdot Z_R$. Trotzdem scheint (11) unbegrenzt und universell gültig zu sein. Im entscheidenden Gegensatz zum Comptoneffekt wird angenommen, dass auch fiktive Ruhmassen, wie z.B. Bindungsenergien einbezogen werden können. Außerdem dürften die Reichweiten bei den gravitativen Effekten größer sein. Verkleinert man in Abb. 16 den Standardfall um 10^9 , dann nehmen O und Y fast den gleichen Wert von $5 \text{ eV}/c$ an, während ihre Differenz Z auf $1/3$ von 10^{-19} abfällt.

12. Der schulgerechte klassische Stoß

Der schulgerechte klassische Stoß unterscheidet sich von seinem gleichnamigen relativistischen Pendant formal nur geringfügig, beide besitzen dasselbe Impulsdreieck, dieselbe Ruhmasse A, dieselben Winkel und anderes. Nur die ruhende Masse B wird etwas kleiner, wie Abb. 17 überraschend zeigt. Wäre man vom klassischen Fall ausgegangen, dann müsste man die Frage stellen: Wie kommt die Relativistik unversehens in den klassischen Ansatz? Die geometrische Stoßbehandlung führt sozusagen automatisch zum relativistischen Stoß. Insbesondere die Impulsgröße ist souverän, sie ist invariant gegenüber der SRT. Wie der Impuls zusammengesetzt ist und hergeleitet wird, das steht auf einem anderen Blatt. Die klassische Stoßmechanik erhält man eigentlich nur über die SRT. So weisen die Vokabeln Ruhenergie und Gesamtenergie bereits relativistische Züge auf. Es

sei das soeben behandelte Exempel aufgegriffen! Bei einer Ruhenergie von 12 GeV bedeutet eine kinetische Energie von nur 1/3 von 10^9 eV ziemlich wenig. Die SRT ermittelt daraus eine Geschwindigkeit von 70 cm/s, eine klare Einordnung in die klassische Mechanik. Bei der Stoßenergie erinnere man sich der Tatsache, dass die *Gesamtenergie* eine Erhaltungsgröße ist, also müssen E_A und $E_R + E_B$ übereinstimmen. Doch dieser Ansatz stimmt noch nicht ganz, weil die Energie E_{B0} der vorher ruhenden Masse B vergessen wurde. Richtig muss es heißen: $E_A + E_{B0} = E_R + E_B$. Das Paradebeispiel ergibt mit $\epsilon = 1$ die Beziehung (13). Die Kenntnis dieser Energieerhaltung, auch in der Schreibweise mit z als kinetischer Energie, ist nicht unwahrscheinlich neu. Es ist Einsteins Verdienst, hier Ordnung geschaffen zu haben. Sehr wichtig ist die Verbindung von Energie und Impuls nach Formel (14) in der Schreibweise mit und ohne $\epsilon = 1$. Alles das reicht schon für die vollständige dynamische Beschreibung des Stoßes. Die abgeleitete Verschiebungsformel enthält auch nichts weiter als zwei (ruhemassenlose) Impulsvektoren sowie ein Teilchen, das aus dem Stand heraus eine (aus den Impulsen stammende) kinetische Energie erhält.

Die relativistische Masse, die Winkel und die Geschwindigkeit β_A sind damit noch nicht bekannt, um letztere zu berechnen, braucht man das ganze Repertoire der SRT für das Einzelteilchen. Wenn die Ruhmasse m_{A0} und die Massenzunahme z_A bekannt sind, dann ist mit der SRT eine Aussage über m_A , β_A möglich, siehe Formel (15), welche eine schöne Definition für z liefert. Das Symbol γ ist eine übliche Abkürzung für den Radikanten im Nenner. Die Relation (16) resultiert aus Formel (14), welche ausmultipliziert über eine quadratische Gleichung zu z_A führt.

$$(13) (m_{A0} + z_A) + m_{B0} = (m_{R0} + z_R) + (m_{B0} + z_B) \\ (12 + 2) + (36 + 0) = (12 + 1) + (36 + 1)$$

$$(14) (m_{0A}^2 \cdot \epsilon^4 + p_A^2 \cdot \epsilon^2) = (m_{0A} \cdot \epsilon^2 + z_A \cdot \epsilon^2)^2 = \\ E_{ges}^2 = (m_A \cdot \epsilon^2)^2$$

$$(14) m_{A0}^2 + p_A^2 = (m_{A0} + z_A)^2 = m_A^2 \\ 12^2 + 52 = (12 + 2)^2 = 14^2$$

$$(15) z_A / m_{A0} = 1 / \sqrt{1 - \beta_A^2} - 1 = \gamma_A - 1 \\ 2 / 12 = 14 / 12 - 1 \quad \beta_A = 0,515$$

$$(16) 2 \cdot m_{A0} = p_A^2 / z_A - z_A \quad 2 \cdot 12 = 52 / 2 - 2$$

Es folgt noch ein Sprung in die klassische Mechanik zu den sehr niedrigen Geschwindigkeiten. Auch hier ist das Konzept der Impulse als Seitenhalbierende uneingeschränkt anwendbar. Überraschend stellt man fest, dass ein Dreieck, wie z.B. das mit den Seiten 3 4 5 des Paradebeispiels mit den Impulsquadraten 52, 25 und 73 sowohl für niedrige und hohe Geschwindigkeiten verwendbar ist, und dies sogar unter Beibehaltung von $m_A = 12$. Die Vorlage eines Dreiecks mit seinen Seitenhalbierenden (Impulsen) und implizierten Winkeln liefert ein stimmiges Ensemble, das den

verschiedensten physikalischen Stoßszenen zugeordnet werden kann. Die Eigenschaften (Impulse, Gravonen, Gravoton) lassen sich jedoch nicht wie gewohnt maßstäblich verändern, wie bereits anhand der Tabelle in Abb. 16 erörtert wurde. Die klassische Mechanik besagt für die kinetische Energie $e_A = p_A^2 / (2 \cdot m_{A0})$. Benutzt man die Ruhmasse wie beim Paradebeispiel, dann folgt $e_A = 52 / (2 \cdot 12) = 2,16666$. Der letzte verbleibende Parameter $m_B = 36$ kann dabei nicht aufrechterhalten werden, m_B ändert sich und nimmt den neuen Wert 32,4444 an. Zur Erklärung sei folgender Weg skizziert: $e_B = e_A - e_R$ daraus $p_B^2 / m_B = p_A^2 / m_A - p_R^2 / m_R$. Gleichsetzen von m_{A0} mit m_A mit $m_R = m_A$ ergibt $73 / m_B = 1 / m_A \cdot (52 - 25) = 27 / 12$. Daraus resultiert die Masse $m_B = 73 \cdot 4 / 9$.

Auffällig ist, dass bei den relativistischen Stößen im Laborsystem nicht das Target B, sondern das stoßende Teilchen A die Szene bestimmt.

Relativistischer und			klassischer Stoß
bei gleichem Impulsdreieck			
$p_A = \sqrt{52}$		$p_A = \sqrt{52}$	
$p_B = \sqrt{73}$		$p_B = \sqrt{73}$	
$p_R = \sqrt{25}$		$p_R = \sqrt{25}$	
$m_{A0} = 12$		$m_A = 12$	
$m_{R0} = 12$		$m_R = 12$	
$m_{B0} = 36$		$m_B = 32 + 4/9$	
$\beta_A = 0,51508 = \sqrt{52/14}$		$v_A = 0,6009 = \sqrt{52/12}$	($= p_A / m_A$)
$\beta_R = 0,38462 = \sqrt{25/13}$		$u_R = 0,41666 = \sqrt{25/12}$	
$\beta_B = 0,23092 = \sqrt{73/37}$		$u_B = 0,26334 = \sqrt{73/m_B}$	
$e_A = 2$		$= 2,16666 = \frac{1}{2} \cdot m_A \cdot v_A^2 = p_A^2 / (2 \cdot m_A)$	
$e_R = 1$		$= 1,041666 = \frac{1}{2} \cdot m_A \cdot v_R^2 = p_R^2 / (2 \cdot m_A)$	
$e_B = 1$		$= 1,125 = \frac{1}{2} \cdot m_B \cdot v_B^2 = p_B^2 / (2 \cdot m_B)$	

Abb. 17: Gegenüberstellung zweier Fälle mit gleichen Seitenhalbierenden. Man erkennt eine regelmäßige Zunahme der Werte von links nach rechts, abgesehen von m_B , das kleiner wird. Hervorzuheben ist, dass man zu den klassischen Werten (Spalte rechts) erst dann gelangt, wenn die relativistischen Werte (Spalte links) bekannt sind. Ursache dafür sind Relationen, die für das speziell relativistische Dreieck gelten, nämlich $O - Y = z_A$, $X - Y = z_R$, $O - X = z_B$ sowie $O + X + Y = m_{A0}$. Die Gegenüberstellung bedarf noch einer Erläuterung, links gilt $c = 1$, während die rechte Spalte durch Maßeinheiten der klassischen Physik konkretisiert werden muss.

Die Sonderstellung des stoßenden Teilchens äußert sich darin, dass nur die Komponenten von A bzw. R bei gleich bleibenden Impulsen p_A und p_R und bei gleicher konstanter Ruhmasse $m_A = m_R = 12$ unterschiedliche Werte für e_B liefern, nämlich relativistisch $e_B = 1$ und klassisch $\frac{1}{2}$ von $73/m_B = 9/4$.

Die Aussagen von Abb. 17 dürften vermutlich nicht so schnell einleuchten. Deswegen ein Rückblick zum Dreieck und zur langsamen Geschwindigkeit. In Gleichung (9) ganz rechts erkennt man den Kosinussatz, der sich vervollständigen lässt durch $2 \cdot p_A \cdot p_R \cdot \cos \vartheta = p_A^2 + p_R^2 - p_B^2$. Der Winkel ist der eingangs genannte Streuwinkel. Eine Gleichsetzung ergibt mithin $2 \cdot z_A \cdot z_R = 2 \cdot p_A \cdot p_R \cdot \cos \vartheta$, woraus eine eigenartige Beziehung (17) resultiert, die den Anschein erweckt, als bestehe eine Relation zu den Geschwindigkeiten.

$$(17) \quad \cos \vartheta = z_A/p_A \cdot z_R/p_R$$

In der Tat erhält man diese im mechanischen Fall $v_A = 2 \cdot z_A \cdot c^2 / p_A$. Dasselbe gilt für B und R. Hier wird noch einmal die souveräne Rolle des Impulses deutlich, denn aus ihm erhält man im Kontext des Gesagten E_{kin} aus p_A und v_A . Schwieriger und heimtückisch ist die Rolle der Zusatzmasse z_A bzw. der kinetischen Energie $2 \cdot z_A \cdot c^2$. Die relativistische Zusatzmasse, definiert in (15) und durch $E_{\text{kin}} = z_A \cdot c^2$ kann nur mittels der Masse-Energie-Beziehung von Einstein behandelt werden, auch im hier vorliegenden klassischen Fall. Hier prallen die Lichtgeschwindigkeit c und die langsame Bewegung v sozusagen aufeinander mit der Folge, dass $\beta = v/c$ verschwindend klein wird. Weshalb nun der Faktor 2? Darauf gibt die für die SRT dominierende Reihenentwicklung eine Antwort.

$$(18) \quad E_{\text{kin}} = m_0 \cdot c^2 (1/\sqrt{1-\beta^2} - 1) = m_0 \cdot c^2 \cdot (1 + 1/2 \cdot \beta^2 + 3/8 \cdot \beta^4 + 5/16 \cdot \beta^6 + \dots - 1)$$

$\vec{p}_A = \vec{p}_B + \vec{p}_R$	$\vec{p}_A = m_A \cdot \vec{v}_A$	$\vec{p}_B = \dots$
$e_A = e_B + e_R$	$e_A = \frac{1}{2} m_A \cdot v_A^2$	$e_B = \frac{1}{2} \dots$

Abb. 18: Beim Übergang vom klassischen zum relativistischen Stoß bleiben die Formeln bestehen, abgesehen vom Faktor $1/2$, der mit zunehmendem relativistischem Charakter allmählich den Wert 1 annimmt. Beim Paradebeispiel bewegt sich der Faktor im Bereich 0,51 bis 0,53 und zeigt damit eine nur schwache Relativität. Die Symbole e_i bezeichnen mit verallgemeinertem Index die kinetische Energie.

Die kinetische Energie reduziert sich auf $1/2 \cdot m_0 \cdot v^2$, und weil es wortwörtlich *nur die Hälfte* vom Ganzen ist, darf man nicht dem Irrtum verfallen annehmen, der schulgerechte relativistische Fall sei das Doppelte. Die Gegenüberstellung Abb. 17 enthält beides, die Hälfte (den klassischen Fall) rechts und den privilegierten, schulgerechten relativistischen Fall auf der linken Seite. Im letztgenannten Fall ist der *Impuls der Ruhmasse* in gewisser Weise tatsächlich an einer oberen Grenze angelangt, wie Gleichung 12 zeigt. Die untere Grenze ist das *klassische Pendant*. Unser Dreieck mit den Seitenhalbierenden bleibt geometrisch unverändert, dennoch verbirgt sich dahinter die Existenz der beiden Grenzfälle von Abb. 17. Dazwischen existiert noch ein Kontinuum von Werten für m_{0B} . Die

Bedenken über die Frage nach der Stecknadel im Heuhaufen, d.h. nach dem Seltenheitswert der geschilderten Fälle im gesamten Stoßgeschehen, können zerstreut werden.

Die klassische und die relativistische Welt werden durch die Geschwindigkeit v getrennt. Was ist v im Bilde des Impulsdreiecks? In der Relativistik wie in der Mechanik wird geschrieben $v = p/m = p/(m_0 + z)$. Im Nenner steht die effektive Masse, und die ganze SRT der Masse reduziert sich auf diesen schlichten Sachverhalt! Außerdem ist die Konstanz der Relativgeschwindigkeit auch eine markante Eigenschaft allein des klassischen elastischen Stoßes. Wir formulieren noch ein letztes Kriterium: In der klassischen Dynamik des Stoßes gibt es keine Zusatzmasse z , wohl aber eine kinetische Energie $z \cdot c^2$, und mancher wird denken, das kann doch wohl nicht wahr sein. Die Reihenentwicklung (18) klärt den vermeintlichen Widerspruch. Man kann getrost z gleich Null setzen, weil der Impuls bereits allein die Bewegung ausreichend verkörpert $v = p/m = p/(m_0 + 0)$, aber ganz sauber ist das nicht. Die klassische Mechanik bleibt eine Näherung der Relativistik.

Typisch für das Konzept der Seitenhalbierenden beim Zweierstoß im Laborsystem ist, dass eine niedrige Geschwindigkeit nicht allein, sondern gepaart mit hohen Geschwindigkeiten auftritt. Das Fehlen von ultrarelativistischen Werten fällt allerdings auf, es kommen sozusagen nur sanfte, moderate Geschwindigkeiten unterhalb 60% Lichtgeschwindigkeit vor und dies folgt bereits aus den auf Seite 12 genannten Kriterien. Als Richtwert gilt, dass die Summe der drei β -Werte etwa 1 ist.

Die Offenbarung der Gegenüberstellung von klassischem und relativistischem Stoß, wie in Abb. 17 geschehen, liegt in der Wahl der Maßeinheiten. Wenn man sich streng an das Impulsdreieck *ohne* physikalische Einheiten hält, dann bewegt man sich auf einem besonderen Pfad der sich selbst einstellenden dimensionslosen Einheiten. Dimensionslose Stöße sind im Konzept der Seitenhalbierenden privilegiert und werden als schulgerecht bezeichnet. Wie sich noch herausstellen wird, beschreiben diese Stöße gebundene Zustände mit der Eigenart, dass eine Massendifferenz $m_{0B} - m_{0A}$ als relativistisches Massendefizit aufgefasst wird, welchem eine äquivalente Bewegungsenergie zugeordnet wird. Übertrieben gesagt können also Helium und Tritium als Stoßpartner aufgrund ihrer Massendifferenz nur dann einen schulgerechten Stoß ausführen, wenn die Kernfusionsenergie als Stoßenergie vorgegeben wird. Ein zugegeben ungeheuerliches Ansinnen, das jedoch in Formel (21) konkretisiert wird! Die ständige Frage nach der Verallgemeinerungsfähigkeit beantwortet sich so, dass ein schmaler aber kontinuierlicher Weg quer durch alle Massen und Energien existiert. Je zwei Ruhmassen als Partner haben eine Lösung.

13. Grenzfall Massenverhältnis unendlich, Beispiel Elektron und Neutron

Der Grenzfall mit Massenverhältnis unendlich scheint uninteressant zu sein, weil sattsam bekannt ist, dass ein Ball auf einer Tischtennisplatte problemlos reflektiert wird. Dies geschieht umso exakter, je elastischer der Aufprall auf der sehr großen ruhenden Masse verläuft. In Abb. 20 ist ein analoger Fall dargestellt, wobei der grau gezeichnete Impuls $p_A = \sqrt{17}$ den auftreffenden Ball mit einer Ruhmasse m_{0A} vom 8 Einheiten symbolisiert. Wo sich die unendlich große Masse m_{0B} in dem Impulsdreieck befindet, ist nicht genau auszumachen, aber der entstehende Impuls $p_B = \sqrt{32}$ kann nicht übersehen werden. Er ist als Doppelstrich gezeichnet und zeigt nach oben. Dass mit einer Geschwindigkeit gleich Null ein Impuls existiert, ist eine sophistische Angelegenheit. Viel mehr sollte uns die Frage nach den Impulspaaren bewegen. Bereits beim geraden klassischen Stoß war aufgefallen, dass absolut gesehen die Zahl der Impulseinheiten anwächst, welches mit der Trennung von Impulspaaren erklärt wurde, siehe Abb. 19. Auch beim Konzept der Impulse als Seitenhalbierende verzeichnet man ähnliche Effekte, wozu allerdings die Impulsquadrate AA, BB, RR gebraucht werden. In der Phase nach dem Stoß sind BB und RR entgegengerichtet, selbst wenn die Winkel dies mitunter nur wenig überzeugend anzeigen. Nimmt man AA als positiv, dann ist BB auch positiv und RR negativ. Wie steht es nun mit der Bilanz zwischen AA und BB-RR? Sie ist nicht ausgeglichen, wenn aber auf der rechten Seite ein Zusatz, nämlich die Anzahl der Impulspaare, aufaddiert wird, dann stimmt alles.

$$(19) \quad AA = (BB-RR) + 2 \cdot Z_A \cdot Z_R$$

$$p_A^2 = (p_B^2 - p_R^2) + 2 \cdot Z_A \cdot Z_R$$

Selbst im Grenzfall $m_{0B}/m_{0A} \approx \infty$ herrscht Übereinstimmung, mit $Z_B=0$ und $Z_A=Z_R=1$ folgt $17=(32-17)+2$. Die Anwendung auf das Paradebeispiel lautet analog $52=(73-25)+4$. Hier wird eine Brücke geschlagen von den Impulsen zu den kinetischen Energien $Z \cdot \epsilon^2$, die gleichzeitig Differenzen der Gravonen sind.

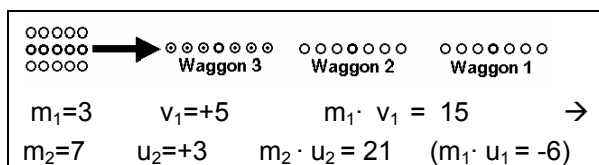


Abb. 19: Impulsdarstellung eines klassischen geraden Stoßes mit einer ruhenden Masse 7. Der Startimpuls von 15 Einheiten bewirkt nach dem Stoß eine Impulserhöhung auf 15+6 Einheiten sowie einen Rückstoß von -6 Einheiten auf der Stoßgeraden. Es werden also 6 Impulspaare in Plusimpuls und Minusimpulse aufgetrennt. Beim rückwärtigen

Verlauf tritt die Masse m_2 in den Ruhezustand unter Bildung von 6 Paaren. Bild aus dem Abschnitt „Nachahmung der Stoßimpulse durch Vorschulkinder“ (Band 1, S. 150 [2]).

Im Einzelnen ist der Grenzfall $m_{0B}/m_{0A} \approx \infty$ gekennzeichnet durch ein gleichschenkliges Dreieck, gebildet aus den Schenkeln O und X. Es gibt eine Überraschung, indem nur eine einzige Winkelkonstellation existiert. Das Impulsdreieck lässt sich zwar vergrößern oder verkleinern, es gibt aber nur einen Basiswinkel α von $70,52877^\circ$, dessen Kosinus genau $1/3$ beträgt. Der Reflexionswinkel zwischen Impuls A und Impuls R hat einen Wert von ca. $93,3^\circ$, sein Kosinus beträgt genau $-1/17$. Manche geometrische Merkwürdigkeit verbirgt sich in diesem Impulsdreieck, über das im Band 3 [2] im Zusammenhang mit Atomen noch zu berichten ist. Zum ersten verhalten sich die Seiten O/Y wie $3/2$. Zum zweiten ergibt sich aus dem $\cos \alpha = 1/3$ ein Sinus, dessen Kehrwert $1/\sin \alpha = 1/\sqrt{(1-\beta^2)}$ entspricht. Daraus folgt als relativer Geschwindigkeitswert β von etwa $0,458$. Setzt man $\sin^2 \alpha = m_0/m$, dann erhält man folgerichtig $\sin^2 + \cos^2 = 8/9 + 1/9 = 1$. Aus diesen Werten lässt sich nun folgendes einfache Impulsdreieck an der Ecke A (mit anliegendem Winkel α) konstruieren: Aus der Annahme $m_0/m = 8/9$ ist eine Ruhmasse $m_{0A} = 8$ und eine Zusatzmasse $Z_A = m_A - m_{0A} = 1$ zu schlussfolgern. Gemäß Formel 7 erhält man daraus wegen der Symmetrie von $Z_A = Z_R$ einen Wert für $Y = 2$ und daraus sukzessive $O = X = 3$. Die Impulse nach (6) ergeben sich zu $p_A = p_R = \sqrt{17}$ und $p_B = \sqrt{32}$ und es soll nicht der Hinweis fehlen, dass die wahren Seitenhalbierenden nur halb so groß sind. Die Comptonbeziehung gestaltet sich an dieser Ecke A so, dass ein Photonenimpuls O auf ein ruhendes Teilchen $m_{0A} = 8$ trifft. Es wird ein verringerter Photonenimpuls Y unter dem Streuwinkel $\vartheta = 180 - \alpha$ ausgesendet, welcher gegenüber dem Eingangsphoton einen Impulsverlust O-Y aufweist. Bei der offenen Wahl unserer Einheiten und bei $\epsilon = 1$ entspricht dieser Verlust einem Energiebetrag von einer Einheit O-Y, den das ruhende Teilchen aufnimmt. Dabei erhöht sich die Ruhmasse 8 um eine Einheit, welches einer relativen Geschwindigkeit β_A entspricht. Unter den besonderen Umständen dieses Grenzfalles und bei diesem Winkel α gelangt man zu $\beta_A^2 = 1 - \sin^4 \alpha$. Als Richtung des bewegten Teilchens findet man die Seitenhalbierende, die in Abb. 20 grau markiert wurde. Der Comptonwinkel φ an A beträgt $27,2134^\circ$. Es ist kein Zufall, dass die Mathematik die Physik in der folgenden Formel widerspiegelt: $1/Y - 1/O = 1/m_{0A} \cdot (1 + \cos \alpha)$. Das Minusvorzeichen verwandelt sich wegen des Supplementwinkels von α in Plus.

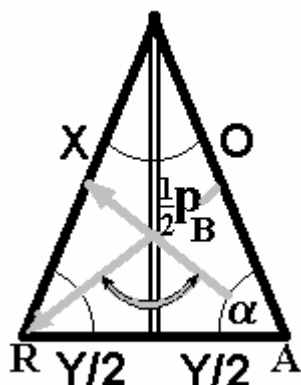


Abb. 20: Impuls-Dreieck mit den Seiten O, X, Y. Der Impuls p_B des unendlich schweren Teilchens B entsteht aus dem stoßenden Impuls p_A (grau gezeichnet) und dem symmetrisch dazu reflektierten Impuls p_R . Vorsicht, alle Impulse sind doppelt so groß wie

die Seitenhalbierenden.

Das Konzept der Seitenhalbierenden beinhaltet den Rydberg-Ritz-Einstieg, der geradezu Wunder bewirkt, der aber andererseits ziemlich ernüchtert, wenn man einen Vergleich zur Schulphysik des Dreiecks anstellt. Es ist nämlich kein Wunder, dass man mit der Vorgabe von zwei Innenwinkeln ein Dreieck völlig bestimmen kann. Der Rydberg-Ritz-Einstieg erfordert zwei z-Werte, siehe S. 12. Es lohnt sich aus vielen Gründen, z_A und z_R vorzugeben, und der Weg zum Wertetripel ist nicht weit, ebenso wie bei den Dreieckswinkeln. Die Verwandtschaft zu den Dreieckswinkeln ist eminent, weil jeder z-Wert einer Ecke des Impulsdreiecks zugeordnet ist. So genügen die Werte $z_A = 2$ und $z_R = 1$ zum Entfalten des ganzen Gebäudes, welches bisher als Paradebeispiel benutzt wurde. Die Konstellation $z_A \gg z_R$ führt zum Grenzwert der Massengleichheit und zu einer Geraden. Die Konstellation $z_A \approx z_R$ unter Beachtung $z_A > z_R$ führt zum anderen Grenzwert $m_{0B}/m_{0A} \approx \infty$, der soeben in Abb. 20 behandelt wurde. Es soll hierzu ein Beispiel ausprobiert werden, das nahe am Grenzwert liegt. Vielleicht eignet sich das Elektron mit seiner kleinen Masse als Stoßpartner. Als Target wäre das Proton nahe liegend, doch wegen der Ladungsgegensätze, die den elastischen Charakter beeinträchtigen, wird besser das Neutron ausgewählt. Die Fragestellung lautet nun, wie verläuft der Stoß eines Elektrons $m_e = m_{0A}$ auf ein ruhendes Neutron $m_n = m_{0B}$? Die Massendifferenz beider Partner beträgt $1,67401766 \cdot 10^{-27}$ kg, da aber bisher nur dimensionslose Massen verwendet wurden, wird überhaupt darauf verzichtet. Hier interessiert eigentlich nur der Verhältniswert $m_n/m_e = 1838,68366$. Für den Rydberg-Ritz-Einstieg müsste man die ausgesucht erscheinenden Werte $z_A = 3,3351462248$ und $z_R = 3,3315204418$ vorgeben, mit denen man zu den folgenden Überraschungen gelangt: $z_A + z_R = Y = 20/3$, $z_A \cdot z_R = 100/9$, $m_{0A} = m_{0R} = 80/3$, $p_B = 40/3 \cdot \sqrt{2}$, $H = 40/3$ (Halber Umfang), $R_0^2 = 50/9 = \text{Inkreisradius}^2$. Die Zahlen sind zwar nicht spektakulär, aber dennoch ungewöhnlich für das Verhältnis m_n/m_e . Beim Abtasten der Umgebung stellt man fest, dass im

Falle Elektron-Neutron *ganze* Zahlen dominieren. Der Rydberg-Ritz-Einstieg ist bei Vorgabe eines Massenverhältnisses nicht effektiv. Der Einstieg ist trotzdem elegant und liefert für beliebige Zahlen ausnahmslos schulgerechte Stöße. Man gewinnt den Eindruck, als könne man damit alle denkbaren Zweierstöße im Laborsystem beschreiben, was aber nicht zutrifft. Hier noch einmal einige Werte zum besagten schulgerechten Stoß von Elektron und Neutron, der aber manipuliert ist.

p_B	p_A	p_R	18,8561812	13,7476422	13,7397278
O	X	Y	10,0018129	9,9981871	6,6666667
z_B	z_A	z_R	0,0036258	3,3351462	3,3315204
m_{0B}	m_{0A}	m_{0R}	49031,5547	26,666667	26,666667

Abb. 21: Zahlen zum schulgerechten Stoß von Elektron und Neutron. Die Indizes A verweisen auf die stoßende Masse A, gleichbedeutend kann der Index S verwendet werden. Die Indizes B für Teilchen B können gleichbedeutend durch T wie Target ersetzt werden. Die Winkel sind in Abb. 27 unter Ziffer 3 erklärt.

Der Grenzfall des unendlichen Massenverhältnisses und der exerzierte Fall der Reflexion eines Elektrons laden zum Verweilen ein, um über die Zerstückelung der Elektronenmasse nachzudenken. Das Elektron hat bekanntlich keine innere Struktur, seine natürliche Ruhmasse bleibt ein Rätsel, und da kommt ein Konzept der Seitenhalbierenden daher und will das elementarste Teilchen in Gravonen zerstückeln. Wie die Aufteilung der stoßenden Masse genau vor sich gehen soll, darüber sprechen die im Abschnitt 10 erwähnten Kriterien eine deutliche Sprache. Genau ein Viertel des Elektrons entfällt demnach auf das Gravon Y, wie Kriterium 2d behauptet. Folgerichtig entfallen die restlichen 75% des Elektrons auf die Gravonen O und X, wie Kriterium 2c behauptet. Dies deckt sich mit der Feststellung des Kriteriums 2e, wonach $O+X+Y$ gemäß (12) gleich m_A sein soll. Damit ist die Zerstückelung des Elektrons definitiv erklärt, es fehlt nur noch die Begründung. Das Kriterium 2b gibt einen entscheidenden Hinweis unter Bezug auf das Massenäquivalent der kinetischen Energie des eintretenden und austretenden Elektrons. Die Summe der relativistische Zusatzmasse $z_A + z_R$ soll gemäß (8) dem Wert Y entsprechen. Mit anderen Worten gesagt, ohne Erfüllung dieser Vorbedingung findet kein schulgerechter Stoß statt. Erst wenn das Elektron kraft seiner Eigenbewegung exakt 25% zusätzliche Masse aufbringt, dann kann eine Wechselwirkung an einer unendlich großen ruhenden Masse stattfinden. Erst wenn ein Viertel des Eigenkapitals nochmals zusätzlich als flüssiges Kapital, als Bewegungsanteil vorliegt, dann findet die Aktion statt. Dies ist eine abenteuerliche Forderung, die jedes Tischtennis-Spiel vereiteln würde. Das Elektron ist untauglich für Ballspiele. Deswegen wählen wir hier ein anderes Beispiel, nämlich die *mechanische Anregung* des H-Atoms.

Hier eignet sich nur eine ganz bestimmte Anregungsenergie, um eine Wechselwirkung herbeizuführen, womit der niedrigste Übergang der Lymanserie gemeint ist. Die Bindungsenergie E_{Rydberg} spielt die Rolle einer stoßenden Ruhmasse (auf eine unendlich große Atomkernmasse) und erst wenn genau 25% von E_{Rydberg} in Form von Bewegungsenergie eingebracht werden, dann findet der spektroskopische Übergang statt. Genau $\frac{3}{4}$ der Bindungsenergie gehen als Emissionsquant an die Außenwelt, wie jedem Physiker seit 100 Jahren sattsam bekannt ist.

Den Kriterien 2a bis 2e ist es geschuldet, dass die Stöße nicht gewöhnlich, sondern schulgerecht verlaufen. Die geometrische Ursache liegt ganz klar in der Gleichheit der Ruhmassen A und R. Die unter diesem Kontext erhaltenen Formeln sind im Dreieck nicht mehr zyklisch vertauschbar. Die Seite Y erhält eine privilegierte Rolle. Eine Reihe *geometrischer* und *dimensionsloser* Sondereffekte, zu denen auch die Impulspaare zählen, wird verständlich. Beim folgenden Grenzfall von Abb. 22 genügt eine Abituraufgabe, um den Geschwindigkeitswert für von $\beta_A=0,6$ zu bekommen.

14. Grenzfall Massenverhältnis gleich eins, Proton und Neutron

Der Grenzfall $m_{0B}/m_{0A} = 1$ endet in einer Geraden. Es wird vorerst der *fast* gerade Zweierstoß mit angenähert gleicher Masse vorgezogen. Das Konzept der Seitenhalbierenden wird bei Annäherung des Impulsdreiecks an eine Gerade einem Härtestest unterzogen. Es geht um den Übergang vom schiefen zum geraden Stoß unter Vorgabe einer vorher ruhenden Kugel B. Das Impulsdreieck wird zu einer Geraden flachgedrückt. Vorgegeben seien zwei Impulsquadrate $AA=10000$ und $BB=10001$, die sich nur um eine Einheit unterscheiden, während RR den kleinsten Wert 1 annehmen soll. Die Quadratwurzel ergibt den Impuls $p_A=100$ $p_B=100,005$ $p_R=0,01$. Man erinnere sich, dass die mathematischen Seitenhalbierenden nur die halben physikalischen Impulse repräsentieren. Die OXY-Werte lassen sich geometrisch abschätzen als ein großer Impuls O und zwei halb so große Werte. Die mit hoher Akkuratess gewonnenen Gravonen lauten $O=66,66750$ $X=33,34000$ $Y=33,33500$. Aus der Abb. 22 lässt sich ersehen, dass die Gravonen X und Y die Gerade O angenähert halbieren. Warum allerdings die Strecken O und $\frac{1}{2} \cdot p_A$ nicht gleich sein können, sondern sich um den Faktor von etwa $\frac{2}{3}$ unterscheiden, erklärt sich damit, dass die Impulse $\frac{1}{2} \cdot p_A$ und $\frac{1}{2} \cdot p_B$ die jeweilige gegenüberliegende Seite (Gravon, Impuls) halbieren. Die Impulskomponente R als Dritte im Bunde steht als Seitenhalbierende R angenähert senkrecht auf O und hat eine verschwindende Energie. Die kinetische Energie mit einem Wert $z_R=0,0500$ ist gegenüber den anderen Größen $z_A=33,3325$ und $z_B=33,3275$ sehr gering und geht

mit immer größer werdendem Anfangsimpuls gegen Null. Der Stoß findet somit auf einer Geraden statt. Die Ruhmassen A, R, B haben der Reihe nach die Größe 133,3375 100,0123 133,3775. Man erkennt, dass m_B und m_A nicht übereinstimmen, nur im Grenzfall eines zur Geraden gewordenen Dreiecks herrscht Gleichheit. Spätestens an dieser Stelle dürfte der aufmerksame Leser die Stirn runzeln, weil er nicht einsehen kann, dass drei verschiedene Ruhmassen im Kontext des bisher Gesagten vorkommen dürfen. Die Massen A und B sind zwar ungefähr gleich, aber was ist mit m_R ? Bei völliger Massengleichheit $m_A=m_B$ gäbe es eine Erklärung.



Abb. 22: Ein großer Ball berührt nichtzentral eine kleine Kugel so, dass nur die Andeutung einer senkrechten Auslenkung ohne Energieübertrag registriert werden kann. Das untere Bild zeigt das reale Bild.

Normalerweise lässt man sich vom erlebten Kugelstoß mit Billardkugeln dahingehend beeinflussen, dass man einen nichtzentralen Stoß annimmt.

Dieser Vorstellung zufolge soll die ruhende Kugel seitlich so getroffen werden, dass keine Energieübertragung stattfindet. Dies alles darf sehr bezweifelt werden. Vom Stoßtyp her würde die Angelegenheit als Auffahrtsruhestoß (siehe unten) eingeordnet; denn A stößt nach Abb. 22 auf das ruhende Target R. Wenn dem so wäre, dann muss das Unglaubliche geschehen, dass nämlich R quasi zur Seite gedrückt wird, während die stoßende Masse ungestört ihren Weg fortsetzt. Dies lässt sich an einer großen Kugel sogar, wie vermeintlich angenommen wird, experimentell erhärten, indem der nichtzentrale Stoß gezielt auf eine Schräge (ohne Rotation) gerichtet und reflektiert wird. Das Konzept der Impulse als Seitenhalbierende ist mit dem makroskopischen Bild nicht in Einklang zu bringen. Nicht alle, sondern nur wenige der vorgegeben Impulstripel führen zu einem Stoß mit zwei gleichen Ruhmassen. So muss also die Aufgabe mit $AA=10000$ und $BB=10001$ überdacht werden.

Setzt man statt dessen $AA=10000 \cdot \sqrt{2}$ und $BB=AA+1$ und nutzt die Chance, RR in beschränktem Maße variieren zu können, dann gelingt es, Massengleichheit zu erzielen. Wir machen RR zur Variablen bzw. zur Laufzahl, und diese liefert mit 1 eine Masse $m_R=119$ und mit 2 die Masse $m_R=237$. Da die Ruhmassen A, B (158,5) einander etwa gleichen, kommt m_R einmal darunter und einmal darüber zu liegen und kann auf Gleichstand eingeregelt werden. Es gibt also überraschend einen nahtlosen Übergang zwischen den Stoßtypen des FRS (Frontalruhestoß d.h. $m_A < m_R$) und ARS (Auffahrtsruhestoß d.h. $m_A > m_R$). Als Ergebnis der Regelung resultiert bei $RR=1,3333$ Massengleichheit.



Abb. 23: Das schwarze Auto ist jeweils dreifach schwerer, das graue entsprechend dreifach leichter (siehe Band 1, S. 74 [2]). Beim FRS kommt das schwarze Auto zur Ruhe, beim ARS das graue. Beim Konzept der Seitenhalbierenden ist der Typ FRS gegenüber dem Typ ARS dominierend. Der Fall der Massengleichheit liegt dazwischen. Man vermutet bei $RR=1,3333$ den Werte $4/3$, doch es gibt noch eine Korrektur: $4/3-0,0000527033$ oder $4/3+0,0002305$. Beide Werte führen zum Ziel, der Wert $4/3$ jedoch nicht. Es ist unerheblich, ob $m_R=m_B$ oder $m_R=m_A$ erreicht wird, doch letzteres ist besser für den Ansatz, dass nämlich der stoßende Partner A rechtwinklig als R gebeugt wird, während der ruhende Partner B die Richtung von A übernimmt.

Was hat das vorseitige Rechenexempel gebracht? Mit Verwunderung stellt man fest, dass ein regulärer Stoß stattfindet, wobei die Masse A nahezu rechtwinklig ausgelenkt wird und unter dem Namen R ziemlich kraftlos das Schlachtfeld verlässt. Bezogen auf die kinetische Energie Z_A des Eingangskanals schleppt Z_R nur den Anteil von 0,015% in den Ausgangskanal. Dem entsprechen die relativen Geschwindigkeiten $\beta_A=0,59999$ und $\beta_R=0,0072808$ oder mit anderen Worten $\beta_R = 1 / 137,3274$. Kein Zweifel, es kann nur Zufall sein, wenn hier die Anzeichen einer Feinstrukturkonstante von Sommerfeld [3] auftauchen. Rekapitulieren wir die Annahmen! Ausgehend von unserem SRT-invarianten Ansatz gelangt man mit den Komponenten 1, 10^4 , $\sqrt{2}$ und $4/3$ zu einem elastischen Stoß, dessen Ruhepartner B mit dem Anteil 1,0002122 geringfügig schwerer ist als die Ruhmasse A mit $m_R=m_A$. Die auf Ruhmasse 1 bezogene Massenzunahme hat den Wert $\frac{1}{2}\beta_R^2=0,0000265$. Auf ein Elektron im Positronium-Atom bezogen, würde dies die Hälfte der bekannten Bindungsenergie ergeben, aber leider nur im Konjunktiv. Das gesamte Stoßergebnis kann aus einem anderen Grunde nicht ganz glücklich stimmen, die Rechnung wurde nämlich ohne den Wirt gemacht. Die Natur verfügt gar nicht über zwei (neutrale) Ruhmassen mit dem berechneten Verhältnis 1,0002122. Wir wenden uns deshalb an die zwei bekannten Stoßpartner Proton und das Neutron, die mit dem Wert 1,0013783739 einander ziemlich ähnlich sind und real existieren. Rein zufällig taucht die Zahl 137 wieder auf. Ohne auf die Einzelheiten dieser Elementarteilchen zu achten, suchen wir eine zutreffende Stoßszene mit dem Neutron als ruhenden Partner. Einen Ruhestoß zwischen beiden zu inszenieren, dürfte keine Sensation sein, weil dabei nichts passiert. Sonderbar ist allerdings, dass eine Einordnung eines solchen Stoßes in den Formalismus der seitenhalbierenden

Impulse nur in einem sehr begrenzten Winkelbereich möglich ist. Die Berechnung ergibt einen nahezu geraden Stoß, wobei das stoßende Proton fast alle Energie abgibt und angenähert rechtwinklig abgelenkt wird. Klar ist, dass im Falle einer Massengleichheit der Stoß wie beim Stafettenlauf verläuft; der bewegte Läufer übergibt sämtlichen Energie- und Impulsvorrat an den ruhenden Läufer. Der Bewegungsapparat des Protons durchdringt das Neutron und wird von diesem übernommen. Warum aber gelingt dieser schulgerechte Stoß nicht bei beliebigen Winkeln?

15. Kleine Effekte bewirken Übergang vom Proton zum Neutron

Ein fliegender Wechsel beim Klapperstorch wird betrachtet. Nehmen wir bei aller Despektierlichkeit an, zwei Störche A und B hätten sich bereiterklärt, einen elastischen Ruhestoß vorzuführen. Die Demonstration soll den Unterschied und die Gemeinsamkeit von Bewegungsenergie Z und Ruhmasse m ostentativ erhellen. Das Neubaby soll von A nach B übergeben werden, es verkörpert die Bewegungsenergie Z_A von Storch A. Der Storch B ruht anfangs und verfügt deshalb über keine Bewegungsenergie $Z_B=0$, er wird aber nach dem elastischen Stoß das Baby und damit einen Wert $Z>0$ besitzen. Im Alltag spielt es keine Rolle, ob der Storch groß oder klein ist, aber beim Stoßvorgang ist der Größenunterschied der Stoßpartner resp. ihrer Ruhmassen wichtig.

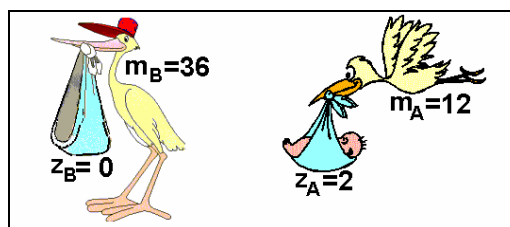


Abb. 24: Adebar A verkörpert eine Ruhmasse 12 und eine der kinetischen Energie entsprechende Zusatzmasse von 2, die durch das Baby symbolisiert wird. Ohne Bewegung kein Baby, d.h. wenn nach dem Stoß Storch B das Baby besitzt, dann nur, weil er Bewegungsenergie übernommen hat.

Die Ruhmassen bei unserem Paradebeispiel verhalten sich wie 1:3, und in der klassischen Mechanik bedeutet dies bei einem geraden Stoß, dass sich beide Stoßpartner danach mit halber Geschwindigkeit voneinander entfernen. Wenn also der Partner A mit der Geschwindigkeit von -2 Einheiten stößt, bekommt er eine Rückstoßgeschwindigkeit +1, während Partner B aus dem Stand heraus die Geschwindigkeit von -1 Einheit annimmt. In Abb. 24 hat aber der stoßende Partner fast Lichtgeschwindigkeit, genauer $v/c=\sqrt{52}/14$, d.h. seine relativistische Massenzunahme beträgt $Z=2$ bei einer Ruhmasse von 12 Einheiten. Die Gesamtmasse von Storch A und Baby beträgt 14

Einheiten. Ein gerader Stoß ist nicht möglich, nach dem Konzept der Seitenhalbierenden stellt sich die Winkelsituation von Abb. 7 ein. Trotzdem ist die Zusatzmasse Z_R des reflektierten Partners wie auch die des gestoßenen Partners Z_B gleich 1 und damit dem obigen Befund (-1 und +1) ziemlich ähnlich. Doch es gibt noch einen weiteren schönen Befund bei dem freudigen Ereignis der beiden Adebare, und zwar geht es um die geringe Restenergie $Z_R=1$, die bei der stoßenden Masse A unter dem Namen R verbleibt. Diese Restenergie ist meist die kleinste aller Energien und zeigt eine Relation mit den Massen:

$$(20) \quad (m_{0B}-m_{0A}) \cdot m_{0A}/m_{0B} = 8 \cdot Z_R$$

Diese für Konzept der Seitenhalbierenden typische und universelle Formel 20 ist im Dreieck nicht zyklisch vertauschbar, sie setzt den Stoßtyp FRS voraus, dass also die anfangs ruhende Ruhmasse die größere von beiden Massen ist. Da beim fast geraden Stoß die Restenergie Z_R eine verschwindende Größe besitzt, ist die Beziehung 20 wertvoll. Wie kommt sie zustande? Natürlich verbirgt sich dahinter wieder eine geometrische Spitzfindigkeit am Dreieck, die auch in der umfassenden Sammlung von Kimberling [8] nicht enthalten ist, weil die Formel wegen der Kriterien des schulgerechten Stoßes nicht zyklisch vertauschbar ist. Es ist, wenn man will, eine Dreiecksformel aus dem Hinterhof der Geometrie. Die physikalische Relevanz ist dennoch augenfällig, insbesondere wenn man sich dem Stoßbeispiel Proton (Masse A) und Neutron (Masse B) wieder zuwendet. Die Parameter des Dreiecks für den besagten Stoß zeigt Abb. 25:

p_B	p_A	p_R	10,0022964	10	0,24745
O	X	Y	6,66692	3,33690	3,33461
Z_B	Z_A	Z_R	3,33002	3,33231	0,00230
m_{0B}	m_{0A}	m_{0R}	13,356820	13,338434	13,338434

Abb. 25: Zahlen zum schulgerechten Stoß von Proton und Neutron. Die Winkel sind in Abb. 27 unter Ziffer 1 erklärt.

Das Verhältnis der Ruhmassen 1,0013783739 war vorgegeben worden, die Massendifferenz ist zunächst frei wählbar und wurde auf den Anfangsimpuls 10 festgelegt. Alles andere ergibt sich von selbst, die Größe p_R erhält man beispielsweise beim automatischen Abgleich $m_{0A}=m_{0R}$, wie oben auf Seite 20 geschildert. Die Rechengenauigkeit war durchweg fünfzehnstellig. Die kinetische Restenergie Z_R ist unmittelbar mit der Geschwindigkeit $\beta \approx 0,01855$ oder in der reziproken Schreibweise mit $1/\beta=53,913490$ verbunden. Die Formel 20 fordert nun für diese Geschwindigkeit und respektive für Z_R eine eindeutige Konstellation beider Massen. Auf das Paradebeispiel angewandt, fordert $Z_R=1$ ein Massenverhältnis 3 und eine Massendifferenz von 24; denn $24 \cdot 1/3=8 \cdot 1$. Wir erhalten $1/\beta_R=2,6$ als reziproke Geschwindigkeit

des Storches A (Abb. 24) nach dem Stoß. Es ist physikalisch ungewöhnlich und in der Welt der Teilchenkollision nahezu undenkbar, dass eine starre Vorschrift 20 die Massen und ihre mögliche Restenergie festschreibt. Konkret zum Stoß Proton-Neutron sagt die Vorschrift eine einzige Stoßmöglichkeit mit $Z_R=0,00230$ voraus, aber zum Glück sind die physikalischen Einheiten noch nicht festgelegt.

Das konkrete Beispiel Proton und Neutron gibt Veranlassung, über die Ruhmassen nachzudenken. Die Verschiebungsformel 11 liefert für jede Ecke des Dreiecks eine Ruhmasse, das wären einmal das Startteilchen A, das Ruheteilchen B und der „reflektierte“ Nachfolger von A namens R. Durch die Annahme $m_{0A}=m_{0R}$ entsteht eine brachiale Vereinfachung bei der Verknüpfung der Massen A und B. Hier liegt auch der Schlüssel für die eigenartige Entdeckung (12), nach der sich die Ruhmasse A in die Strahlimpulse O, X, Y verwandelt. Die Zusammenhänge lauten:

$$(21) \quad m_{0B} / m_{0A} = Y / (O-X) = (Z_A + Z_B) / Z_B$$

Eine vielfältige Interpretation ist möglich. Wenn das Proton als A fungiert, dann muss seine Ruhmasse in O, X, Y aufspalten werden. Da aber das Neutron als Partner B durch die Beziehung (21) schon vorbestimmt ist, wirkt die Formel $m_{0A}=O+X+Y$ nicht isoliert, sondern nur unter Maßgabe von (21). So kann man die Ruhmassen getrost vergessen bzw. sie durch die Gravonen O, X, Y oder durch die kinetischen Energien Z_i ersetzen. Das Impulsdreieck lässt sich, wie bereits angedeutet, auch dynamisch und statisch auffassen, indem man die z-Werte als *Übergänge* zwischen den Gravonen wertet. Die Herkunft der z-Werte konnte bisher ohnehin nur als Differenzbildung erklärt werden. Die Simulation des Impulsdreiecks in drei Takten gemäß den drei *Übergängen* wird im Band 3 [2] eine Rolle spielen. Es besteht ähnlich dem 2. Keplerschen Gesetz die Eigenart, dass jeder Takt eine gleiche Fläche überstreicht. Eine Erweiterung des Algorithmus für nichtregelmäßige Polygone führt sogar zu einer himmelsmechanisch anwendbaren Methodik z.B. zur Lösung von Dreikörperproblemen [11]. Diese Aussicht dürfte jeden dazu ermutigen, die Vokabeln Gravonen und Gravoton (für den Verbund der Gravonen) zu benutzen. Das Impulsdreieck wäre also ein Gravoton.

Ein Aspekt verdient noch erwähnt zu werden, nämlich der schulgerechte Charakter der Stöße. Die sonderbare Einmaligkeit des besagten Stoßes von Proton und Neutron lässt darauf schließen, dass ein *Bindungszustand* vorliegt. Die Forderung von (20) bedeutet grob gesagt, dass das Massenäquivalent Z_R der kinetischen Energie genau so groß wie der Massendifferenz $\Delta = \text{Neutron-Proton}$ sein muss, und jeder weiß, dass Δ eine feste Größe von $2,3055 \text{ exp } -30 \text{ kg}$ ist, hinter der sich Elektron, Neutrino und Massendefekte verbergen. Will man das Neutron

m_{0N} aus dem Proton m_{0P} nach einem eigenen Ansatz $m_{0N} = m_{0P} \cdot (1 + (1+k) / 1836,1528)$ berechnen, so muss ein Wert $k=1,5307$ eingesetzt werden. Wenn nur eine Elektronenmasse hinzugefügt wird, wenn also $k=0$ gesetzt wird, dann ergibt das keine reale Neutronenmasse. Nach dieser einfachen Arithmetik zeigt das Neutron einen Massendefekt von 1,5307. Diese Auskunft liefert auch unser Stoßexperiment, wozu wir die Geschwindigkeiten bzw. ihre reziproken Werte betrachten. Der Stoß eines Protons auf ein ruhendes Neutron liefert für die Ecke A des Dreiecks eine reziproke Geschwindigkeit $1/\beta_A = (m_0+z)/p = (13,33843 + 3,33231)/10 = 1,667075$. Dies sind ziemlich genau 60% der Lichtgeschwindigkeit. Für die Ecke R lauten die Werte entsprechend $(13,33843 + 0,00230)/0,24745 = 53,913490$. Das $1/\beta_R$ liefert in Verbindung mit der Sommerfeldkonstante einen Faktor 2,541807, der einigermaßen genau der Anzahl der Elektronenmassen entspricht, die effektiv im Neutron enthalten sein müssten, wenn es keinen Massendefekt geben würde. Subtrahiert man davon eine 1, nämlich das echt enthaltene Elektron, dann erhält man 1,5418, wie oben angegeben.

Um solche Einblicke in das Innenleben des Neutrons zu gewinnen, braucht man mit dem Konzept der Seitenhalbierenden nur das Verhältnis m_{0N} / m_{0P} und einen Impuls ($p_A=10$), über dessen Wahl später noch einiges zu sagen wäre, vorzugeben. Vielleicht kann der Leser bei der Feststellung mitgehen, dass alle schulgerechten Stöße Bindungszustände sind. Es handelt sich nicht um gewöhnliche Stöße, sondern um stationäre, d.h. aus dem Stoß und dem zeitlich umgekehrten Stoß bestehend, (siehe Band 1 S. 237 [2]) oder stationäre, eingefrorene Stoßereignisse. Relativistische Massenzunahmen und ihre Verwandtschaft zu atomaren und subatomaren Massendefekten sind Gegenstand einer späteren Arbeit.

Da das Beispiel Protonstoß auf Neutron ziemlich nahe auf einer Geraden stattfindet, werfen wir noch einen Blick auf den exakt geraden Stoß, wenn es ihn denn überhaupt gibt. Abb. 26 zeigt den Übergang vom schrägen Stoß zu einer Geraden, hier allerdings in allgemeiner Form ohne ruhende Ruhmasse. Es sind vier Comptonbausteine nötig. Kritiker mögen einwenden, dass die Verwendung der Wellenlängen beim Strahlenviereck unzulässig ist, doch dem sei entgegnet, dass auf der Geraden problemlos vom Bild des Impulsvierecks zum Bild des reziproken Impulsvierecks gewechselt werden kann.

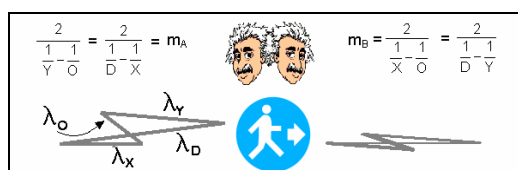


Abb. 26: Übergang vom schiefen zum geraden Stoß, wozu ein Strahlenviereck mit den Strahlimpulsen OXYD notwendig ist. Das Viereck, hier mit den reziproken Impulsen dargestellt, wird flachgedrückt zu einer Geraden, wie der Fußgängerpfad signalisiert. Der Streuwinkel ϑ wird 180° und wegen dieser Rückwärtsstreuung vereinfacht sich das Glied $(1 - \cos \vartheta)$ in der Comptonformel zu der Ziffer 2, die überall in den Masseformeln auftaucht. Die zentrale Verknüpfung der Massen wird deutlich, siehe Band 1 S. 209 und S. 222 [2]. Als Literatur für den geraden Stoß diene vorzugsweise das Buch von Taylor und Wheeler [12] sowie von Ruder [13].

16. Vergleich mit den Literaturwerten

Wir kommen zum Literaturvergleich und finden (z.B. nach Abb. 27) eine volle Übereinstimmung. Die zur Stoßberechnung verfügbaren Formeln stammen für φ von W. Greiner [14] und für ϑ von E. Rebhan [15] und Greiner [14].

$$\cos \vartheta = (E_A \cdot E_R / e^2 + m_{B0} \cdot (E_R - E_A) - m_{A0}^2 \cdot e^2) / (p_A \cdot p_R)$$

$$\cos \vartheta = (E_R \cdot (E_A + m_{B0} \cdot e^2) - E_A \cdot m_{B0} \cdot e^2 - m_{A0}^2 \cdot e^4) / (p_A \cdot p_R \cdot e^2)$$

$$\cos \varphi = (E_A + m_{B0} \cdot e^2) \cdot (E_B - m_{B0} \cdot e^2) / (p_A \cdot p_B \cdot e^2)$$

Unter E_i wird hier stets die Gesamtenergie ($e_i + m_i \cdot c^2$) verstanden. Der Index R ist gleichbedeutend mit C. Die Winkel zwischen den Teilchenimpulsen werden wie in Abb. 7 bezeichnet, es geht also nicht um den Comptoneffekt, dessen Winkel absichtlich ebenso benannt werden, siehe Abb. 2.

Beispiel	ϑ	φ	$\vartheta + \varphi$
1) $p \rightarrow n$	89,823110°	1,416023°	91,239133°
2) Parade	86,820170°	35,753887°	122,574057°
3) $e \rightarrow n$	86,627714°	46,668645°	133,296359°

Abb. 27: Zur konventionellen Stoßberechnung sind die Angaben über kinetische Energie E_A und Impuls p_A des Teilchens A vor dem Stoß sowie entsprechende Werte (E_R und p_R) für Teilchen A nach dem Stoß verlangt. Es reicht nicht aus, wenn nur das Massenverhältnis bekannt ist, beide Ruhmassen werden gebraucht. Für φ ist außerdem noch p_B nötig.

Unter Ziffer 2) ist der bisher als Paradebeispiel mit den Dreieckseiten 3, 4, 5 genannte Fall aufgeführt. Sowohl die Einzelwinkel als auch die Summen $\vartheta + \varphi$ konnten anhand der Winkel der Seitenhalbierenden bestätigt werden. In der letzten Spalte ist z.B. der am Impulsschwerpunkt gemessene Schwerpunktinkel φ zwischen den Seitenhalbierenden R und B aufgeführt. Es herrscht stets Übereinstimmung bis zur letzten Stelle. Unter Ziffer 1) ist das Beispiel Proton auf Neutron als Grenzfall aufgeführt. Unter Ziffer 3) steht der andere Grenzfall (Elektron auf Neutron).

Doch während die Formeln stimmen, stimmen die Streuungsexperimente bedenklich, was besagen will, dass die Vielfältigkeit der Kollisionen von Elementarteilchen bei den schulgerechten Stößen fehlt. Aber die Antwort liegt bereits im Namen, es

sind privilegierte, außergewöhnliche Stöße. Wir ersparen uns hier eine Grundsatzklärung über die Stöße im Laborsystem und über das Konzept der Impulse als Seitenhalbierende. Wir konstatieren jedoch, dass *alle* Stöße ausnahmslos als Seitenhalbierende behandelt werden können, weil jeder Stoß aus drei Impulsen besteht, die sich einerseits aus Erhaltungsgründen als Dreieck und andererseits als Seitenhalbierende in einem übergeordneten (Gravonen-) Dreieck darstellen lassen. Der Vergleich bei Lösungen von Aufgaben aus der Literatur stimmt immer. Der springende Punkt ist jedoch die konsequente Treue zum dimensionslosen Impulsdreieck. Wer darangeht, die Masse und die Geschwindigkeit als selbständige Größen aus der Geometrie herauszulösen, der darf sich nicht wundern, wenn der Massenschwerpunkt nicht mehr auf dem Impulsschwerpunkt liegt. Die bisher größte Restriktion, nämlich $m_{0A}=m_{0R}$ erweist sich als eine selbstverständliche Forderung. Die Festlegung $\epsilon=1$ ist nur aus Gründen der Bequemlichkeit erfolgt. Die Suche nach Kriterien für reguläre und ausgewählte Stöße muss in der Geometrie und in Formeln wie (20) münden. Wer durch Nacht zum Licht will und wer seinen Glauben an die Geometrie noch nicht verloren hat, der kann aufbrechen mit Kurs auf die geometrische Berechnung von Naturkonstanten, siehe z.B. Abb. 29 mit Kommentar.

17. Das Mittelfeld der schulgerechten Stöße

Hier geht es nicht um Grenzfälle, sondern um das Mittelfeld der Lösungen. Das schon oft erwähnte so genannte Paradebeispiel zählt dazu. Das Mittelfeld mit der Vorgabe einfachster Zahlen besitzt eine noch nicht überschaubare Fülle an Überraschungen. Die Ursache dafür liegt in einer am allgemeinen Dreieck vorgenommenen Einschränkung: $a+b=3\cdot c$ mit $a>b>c$. Hinter diesem als Kriterium 2c im Kapitel 10 genannten Zusammenhang verbirgt sich nichts weiter als die Selbstverständlichkeit $m_{0A}=m_{0R}$. Die in den Stoß eintretende Ruhmasse A ist mit der austretenden ehemaligen Ruhmasse identisch. Eine solchermaßen abgewandelte Lehre des Dreiecks ist noch nicht bekannt. Zur Bestandaufnahme seien folgende physikalischen Schlagworte genannt: Ruhmasse A, Ruhmasse B>A, Laborsystem mit ruhendem Teilchen B, elastischer relativistischer Stoß. Alle Fälle zeichnen sich hinsichtlich der Geschwindigkeit $\beta=v/\epsilon$ dadurch aus, dass die Summe der drei β -Werte grob gesagt gleich 1 ist. Die geteilte Tabelle in Abb. 28 zeigt einige Beispiele, darunter auch den Paradefall in der jeweils letzten Zeile. Die Tabelle veranschaulicht auch die Bezeichnung Rydberg-Ritz-Einstieg, indem ein Term (Z_A) auf den Wert 5 belassen wird und ein zweiter Term (Z_R) sozusagen als Laufzahl im Bereich 1 bis (Z_A-1) fungiert. Hier ein Beispiel, wie mit der Intelligenz eines pfiffigen Schülers Aufgaben und Lösungen von relativistischen Zweierstößen behandelt werden.

Man nehme als kinetische Energien zwei zufällige Zahlen $e_A=3$ und $e_C=2$. Wegen der Erhaltung der Energie gilt $e_A=e_C+e_B$, also $e_B=1$. Die Teilchenimpulse p_A, p_C, p_B sind unbekannt, werden aber als Seitenhalbierende des Dreiecks $a b c$ aufgefasst. Jeder Dreieckspunkt verkörpert eines der drei Ereignisse (Teilchen A vor dem Stoß, Teilchen A unter dem Namen C nach dem Stoß sowie Teilchen B nach dem Stoß). Die stoßende Masse A hat hier eine Ruhmasse $m_{A0}=a+b+c$, während die anfangs ruhende Masse m_{B0} nicht sichtbar in Erscheinung tritt. Es besteht eine (an Waagearm und an die zu wiegende Masse erinnernde) Relation



$e_B \cdot m_{B0} = m_{A0} \cdot (e_A + e_C)$. Mit $\epsilon=1$ werden aus den Energien $e_A=e_C+e_B$ nominell fiktive relativistische Massen. Die Dreieckseiten haben wegen der Ruhmassenbeziehung $m_{A0}=a+b+c$ etwas mit Masse zu tun, und auch jede Differenz der angrenzenden Seiten beinhaltet fiktive Masse in Form der kinetischen Energie. Diese Differenzen sind zyklisch vertauschbar $e_A=b-c$, $e_C=a-b$, $e_B=a-c$. Schließlich existiert beim schulgerechten Fall noch

eine einzigartige und einzige Zuordnung $b=e_A+e_C$, die mit der selbstverständlichen Gleichsetzung $m_{A0}=m_{C0}$ der stoßenden Masse vor und nach dem Stoß zusammenhängt. Aus all dem ergibt sich $a=8$, $b=7$, $c=5$, $m_{A0}=20$. Die Seitenhalbierenden in dem somit bekannten Dreieck sind trigonometrisch zugänglich, man erhält z.B. für die Halbierende der Seite c den Wert $s_C=\sqrt{84}$. Beim Übergang von s_C zu p_C als Beispiel muss der Wert grundsätzlich verdoppelt werden. Nun lässt sich daraus die Endgeschwindigkeit ermitteln: $\beta_C=p_C/(m_{A0}+e_C)=\sqrt{84}/22=0,42$. Die Werte analog dazu lauten $\beta_A=0,49$ und $\beta_B=0,14$. Das Ruhmassenverhältnis B/A beträgt 5. Man gelangt also mit geometrischer Schärfe zu Ergebnissen, die die SRT nur mühsam zu ermitteln gestattet, wie das Beispiel mit beliebigen Zahlen beweist.

Beim Rydberg-Ritz-Einstieg können aufgrund der gewählten Laufzahlen auch die Winkel indirekt als Brüche ganzer Zahlen angegeben werden. Die Streuwinkel für den Paradefall wurden bereits in Abb. 27 unter Ziffer 2 aufgeführt. Es überrascht nicht, wenn man bei diesen Serien mathematisch interessante Merkmale feststellt. So lässt sich bei der Serie $Z_A=11$ unter Maßgabe von ungeraden Z_C -Werten der Kosinus des Winkels an der für m_B zuständigen Ecke ausnahmslos unter Mitwirkung markanter Primzahlen ermitteln.

Nachfolgend werden einige Fälle der besagten Klasse, die den Rydberg-Ritz-Einstieg befolgt, aufgelistet. In der letzten Tabellenspalte findet man den Tangens von 9 als Quadrat. Die

Übereinstimmung mit den Literaturwerten [14] und [15] ist exakt und direkt dem Dreieck herleitbar!

z_A	z_R	z_B	O	X	Y	m_A
5	1	4	11	7	6	24
5	2	3	12	9	7	28
5	3	2	13	11	8	32
5	4	1	14	13	9	36
2	1	1	5	4	3	12

m_A	m_A+m_B	AA	RR	\tan^2
24	60	265	49	2592/5
28	280/3	305	116	1764/5
32	160	345	201	1536/5
36	360	385	304	1458/5
12	48	52	25	18 ²

Abb. 28: Einige Beispiele von Zweierstößen, die nach dem Prinzip der Seitenhalbierenden im OXY-Dreieck gemäß Abb. 7 berechnet wurden und somit zur Klasse des Rydberg-Ritz-Einstiegs gehören. Die ersten beiden Spalten enthalten die freien Parameter, aus denen mittels (6) bis (8) die aufgelisteten Werte resultieren. Der Winkel ϑ , der zum Literaturvergleich dient, ist in Abb. 7 beschrieben und wird als Supplementwinkel zu dem am Schwerpunkt liegenden Winkel mit den Schenkeln p_A und p_R berechnet.

Die Zweierstöße der besagten Klasse besitzen einen nicht unbegrenzten Spielraum. So beträgt die relative Mindestmassenzunahme für den Startwert der stoßenden Masse $z_A/m_{0A}=1/8$. Mit zunehmender Annäherung der kinetischen Energien, ausgedrückt durch z_A und z_R , wird das Massenverhältnis B/A immer größer. Bei unendlicher Masse B wird die Masse A bei einem Grenzwinkel $93,3722^\circ$ d.h. bei einem Kosinus von $-1/17$ unverändert reflektiert, wie im Kapitel 13 beschrieben.

Das Paradebeispiel mit den Dreieckseiten 3, 4, 5 ist keine Wellenlängendarstellung, sondern ein Bild der Impulse. Das Einpassen der Impulswerte in das Dreieck geschieht konfliktlos, weil sich Teilchen-Impulse mit Gravon-Impulsen vertragen. Dies ist übrigens der wesentliche Unterschied zwischen Impuls bzw. Längenverknüpfung. Bleibt noch zu fragen, welche Realität unser rechtwinkliges Impulsdreieck hat? Die Impulslängen und die eingeschlossenen Winkel unterscheiden sich etwas und liegen (mitunter fernab) von den Werten des Wellenlängendreiecks. Die Wellenlängen $1/3$, $1/4$ und $1/5$ sind nicht vereinbar mit den bisher benutzten Winkeln $36,870^\circ$, $90,000^\circ$ und $53,130^\circ$. Man berechnet mit den Seitenlängen 0,20, 0,25, 0,3333 die folgenden Winkel: $36,710^\circ$, $94,940^\circ$, $48,350^\circ$. Immer wenn die Heron-Formel mit a , b , c bzw. O , X , Y benutzt wird, entstehen automatisch Winkel, die „impulsorientiert“ sind. Dasselbe trifft bei Rhombus-Vierecken zu, wenn die Impuls-Diagonalen aus OXYD gebildet werden. Anderenfalls wären die Diagonalen „wellenlängenorientiert“.

18. Besondere Vierecke

Zum Schluss der Dreiecke noch ein Blick zu den Photonen-Rechtecken und zum Quadrat von Abb. 29. Ein Strahlenverlauf längs der Seiten eines Quadrates ist unmöglich, weil die Gammaquanten vorher und hinterher gleich sind und keinen Comptonprozess ermöglichen. Deshalb wird die Diagonale einbezogen, die mit jeder Seite im Quadrat einen Winkel einschließt, dessen Supplement den Streuwinkel $\vartheta=135^\circ$ ergibt. Wenn beide Ruhmassen $m_0=1$ sein sollen, dann kommt nach (1) nur eine Diagonalenlänge $3+\sqrt{8}$ sowie eine Seitenlänge $a=1/0,24264$ in Frage. An dieser Stelle noch ein Wort zu den physikalischen Größen Masse und Länge. Man kann nicht alle Größen m_0 , a , h , c gleich 1 setzen. Manipuliert man die Naturkonstanten Comptonwellenlänge λ_{Comp} und Massenäquivalent m_{Ryd} der Rydbergenergie dergestalt, dass bei unveränderten Mantissen gleiche Exponenten entstehen, dann gelangt man mit einer neuen Längen-Maßeinheit C anstelle Zentimeter cm und einer neuen Massen-Maßeinheit G anstelle Gramm g zunächst zu gleich Exponenten:

für λ_{Comp} statt Maßeinheit cm besser C :
 $2,426311 \exp -12 \text{ cm} \rightarrow \exp -22 C$
 für m_{Ryd} statt Maßeinheit g besser G :
 $2,425437 \exp -32 g \rightarrow \exp -22 G$

Mit den neuen Einheiten kann man geometrisch besser argumentieren, so liefern der Quotient in C/G und das Produkt in $C \cdot G$ interessante Werte. Die Anwendung ist mit Vorbehalt nicht nur auf das Elektron beschränkt.

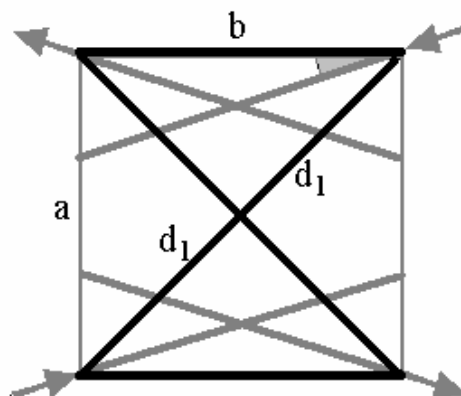


Abb. 29: Es handelt sich um einen elastischen Stoß zweier entgegengesetzt gleicher, allerdings parallel verschobener Körper mit gleichen Ruhmassen. Das Strahlenviereck besteht aus den Diagonalen d_1 und aus Seite b und Gegenseite. Die grau gezeichneten Linien markieren die Teilchenwege. Die Seite a wird durch die Stoßpartner in drei gleiche Abschnitte geteilt. Das Produkt aus Seitenlänge und Ruhmasse ist eine Konstante k . Es spielt keine Rolle, ob das Quadrat groß oder klein ist, und bei $m_0=1$ muss die Seitenlänge gleich k sein.

Bei Änderung des Maßstabs registriert man beim Quadrat noch weitere konstante Größen, wie $\sqrt{\epsilon}$, Streuwinkel sowie das Produkt aus Seitenlänge (bzw. Diagonale) und Impuls. Ein Schönheitsfehler ist, dass die Comptonprozesse über Wellenlängen, nicht über Impulse verknüpft sind.

Sieht man gänzlich vom Exponenten bei λ_{Comp} ab und vergleicht mit dem besagten Kehrwert der Seitenlänge 0,24264, so erhält man als Verhältniswert 1,000040. Der Wert ist leider nicht wie erwartet 1, deshalb ist das Ergebnis mit Vorsicht zu genießen. Trotzdem würde der Zweck die Mittel heiligen, wenn aus magischen Gebilden mit geometrischer Schärfe Naturkonstanten entstünden. Es sei nur angemerkt, dass auch hier beim Viereck das Prinzip der Seitenhalbierenden als Impuls der Stoßpartner maßgeblich mitwirkt.

19. Resümee

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass abgesehen von vielen Facetten des relativistischen Stoßes zweier Teilchen für jede Kombination zweier Ruhmassen zwei schulgerechte Fälle existieren. Das **schulgerechte relativistische Stoßdreieck** verfügt für jede Kombination der Stoßpartner nur über eine einzige Konstellation der Stoßdurchführung mit festen Geschwindigkeiten, Impulsen und Winkeln. Bezeichnend ist die nur schwache Relativität. Durch eine geringfügige Verkleinerung der anfangs ruhenden Ruhmasse B gelangt man zum entsprechenden **schulgerechten klassischen Stoßdreieck**, und zwar unter Beibehaltung der Impulse. Dann gilt aber nicht mehr die Relation zwischen der Ruhmasse A als Summe der Seiten. Auch funktioniert die Nachbildung mit den Comptonbausteinen nicht mehr.

Die Betonung des **schulgerechten Charakters** wird begründet durch den Verzicht auf die Begriffe Vektor, Vierervektor, Infinitesimalrechnung, Aufenthaltswahrscheinlichkeit, Einfangquerschnitt, Streuung, Quantentheorie, Unschärferelation, Teilchenphysik, Maßeinheiten, gebrochene Zahlen, Relativitätstheorie. Stattdessen werden die Seiten eines Impulsdreiecks mit Gravonen bezeichnet. Die Summe der Gravonen erweist sich als Ruhmasse, die Seitenhalbierenden sind Teilchenimpulse. Jede Differenz der Seiten wird deklariert als Gravonenübergang, der bei $\epsilon=1$ eine kinetische Energie liefert. Das für den Stoß erforderliche Wissen über die Relativitätstheorie wird nicht gebraucht, weil das Impulsdreieck diese Komponenten selbst enthält, was zu beweisen war.

20. Literatur

- [1] W. R. Mellen, Amer. Jour. Phys. 49 (1981) 505
- [2] B. Grebe, *Traumjob Einstein - Ideenvorschlag von Zweistein* Dr. Kunz Consult Leipzig 2001, ISBN 3-00-008889-X Bd. 1
- [3] M. Kunz, *Synergie Syntropie Nichtlineare Systeme 1* (1995) 135-145 ISBN 3-930433-04-4
- [4] W. E. Gettys: Physics: classical and modern, Photo Researchers/ Bernice Abbott
- [5] H. Goenner, Einführung in die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie, Spektrum, Akad. Verl. 1996
- [6] D.E. Liebscher, *Relativitätstheorie mit Lineal und Zirkel* Akademie-Verlag 1991
- [7] M. Kunz, *Analogie-Vorrichtung eines binären Informationsspeichers für Strahlenenergie-Umwandlung* Schutzrecht DD229234, WP G09B/2688038 (1984-10-29)
- [8] C. Kimberling, "Major centers of triangles," *Amer. Math. Monthly* 104 (1997) 431-438,
- [9] I. N. Bronstein, K. Semendjajew, Taschenbuch der Mathematik, B.G. Teubner Verlag, Leipzig 1968
- [10] U. Hartje „Materie aus gefangenem Licht“ ISBN: 3-9806131-1-9
- [11] B. Grebe, *Raum & Zeit* 67 (1994) 24
- [12] E. F. Taylor, J. A. Wheeler, *Physik der Raumzeit* Verlag Spektrum 1994
- [13] H. Ruder, *Die Spezielle Relativitätstheorie* Vieweg 1993
- [14] W. Greiner, J. Rafelski, Theoretische Physik, Verlag Harri Deutsch, Bd. 3A S. 148
- [15] E. Rebhahn, Theoretische Physik, Spektrum, Akad. V. Heidelberg, Berlin 1999, Bd. 1 S. 848

Ein Sonderdruck anlässlich der 66. DPG-Physikertagung vom 18. bis 22. März 2002 in Leipzig sowie eine Denkschrift zum 90. Geburtstag von Prof. Dr. Werner Holzmüller am 15.12.2002 sind maßgebliche Quellen für diese Arbeit.